CÁLCULO

INTEGRAIS

meSalva! | ENGENHARIA

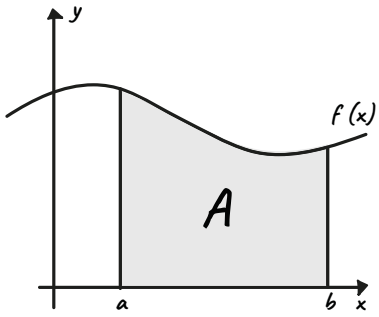
COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

1 DEFINIÇÃO DE INTEGRAL

Dentro do conceito do cálculo, temos que a integral foi criada para delimitar a área A localizada sob uma curva $f(x)$ em um plano cartesiano.



A notação matemática da integral acima é:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx$$

2 INTEGRAL DEFINIDA

A integral acima é chamada de definida, pois possui limites de integração [a,b]. Assim, poderemos determinar um valor para a área abaixo da curva, e não apenas uma equação genérica!

PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Basicamente, temos as mesmas propriedades das integrais indefinidas. Mas há propriedades extras devido aos limites de integração:

1 Quando os limites de integração forem iguais, significa que estamos integrando uma região nula, logo, nosso resultado será 0!

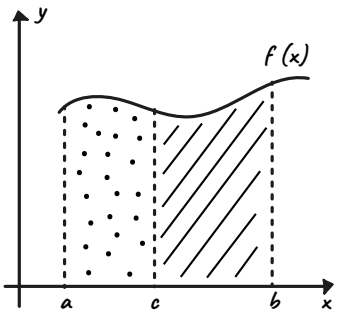
$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2 Quando os limites estão invertidos:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Isto quer dizer que só precisamos invertermos os limites e colocar um sinal negativo para fazer o cálculo!

3 Uma integral pode ser reescrita como a soma de duas integrais, reescrevendo os limites:



$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

INTEGRAL IMPRÓPRIA

Dizemos que uma integral é imprópria quando algum dos limites (ou ambos) é infinito, isto é:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^b f(x)dx \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

Para resolver este tipo de integral, substituímos o limite impróprio por uma variável e calculamos o

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

limite quando ela tende ao limite impróprio, de acordo com as situações abaixo:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to +\infty} \int_a^b f(x)dx + \lim_{b \to -\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Se temos uma descontinuidade no ponto c , dentro do intervalo da função f(x) que está sendo integrada, temos por definição:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to c^-} \int_a^t f(x)dx + \lim_{t \to c^+} \int_t^b f(x)dx$$

Ou seja, separamos em dois intervalos na descontinuidade c:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

TEOREMA DA COMPARAÇÃO

Podemos analisar a convergência de uma integral pelo Teorema da Comparação:

Se $f(x) \geq g(x)$ no intervalo analisado ,então:

se $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ é convergente, então $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ também será convergente.

se $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ é divergente, então $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ também será divergente.

3 INTEGRAL INDEFINIDA

A integral indefinida é também a antiderivada. Ela não tem limites de integração, gerando uma função genérica.

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

LEMBRETE!! Não esqueça de somar a constante C para integrais indefinidas! Nós temos que fazer isso porque a derivada de uma constante resulta em 0 e, como a integral é "o inverso da derivada", precisamos adicionar C!

FÓRMULAS DE INTEGRAÇÃO

Vamos ver uma tabelinha com as integrais básicas que devemos saber!

$\int dx = x + C$	$\int cossec\ x\ cotg\ x\ dx = cossec\ x + C$
$\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\ (r \neq -1)$	$\int e^x\ dx = e^x + C$
$\int cos\ x\ dx = sen\ x + C$	$\int b^x\ dx = \frac{b^x}{ln\ b} + C\ (0<b,\ b \neq 1)$
$\int sen\ x\ dx = cos\ x + C$	$\int \frac{1}{x}\ dx = ln\ \lvert x \rvert + C$
$\int sec^2\ x\ dx = tg\ x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ x + C$
$\int cossec^2\ x\ dx = -\ cotg\ x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = arc\ sen\ x + C$
$\int sec\ x\ tg\ x\ dx = sec\ x + C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = arcsec\ \lvert x \rvert + C$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

PROPRIEDADES DA INTEGRAL INDEFINIDA

1 Sempre que tivermos uma constante multiplicando toda a função que está sendo integrada, ela pode estar dentro ou fora da integral, que dá na mesma!

$$\int c\, f(x)dx = c \int f(x)dx$$

2 A integral de uma soma é a soma das integrais.

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

3 A integral de uma diferença é a diferença das integrais.

$$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$$

SUBSTITUIÇÃO "U"

Utilizamos este método para simplificar a integração, gerando uma integral que sabemos como resolver. Considerando:

$$u = g(x)$$
$$\frac{du}{dx} = g'(x) \rightarrow du = g'(x)dx$$

Substituindo na equação abaixo, temos:

$$\int f(g(x))\, g'(x)dx = F(g(x)) + C$$
$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Exemplo:

Calcule a seguinte integral:

$$\int (x\text{-}3)^{12}dx = ?$$

Vamos definir $u=x\text{-}3$, então nossa derivada será $du=1$ du

Substituindo na integral, temos:

$$\int (x\text{-}3)^{12}dx = \int u^{12}du$$
$$= \frac{u^{13}}{13} + C = \frac{(x\text{-}3)^{13}}{13} + C$$

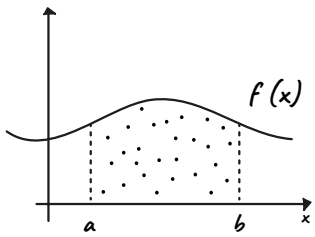
4 TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO

Como o próprio nome já diz, este teorema é fundamental para os nossos estudos de Cálculo! Ele estabelece uma relação entre os conceitos de derivada e integral e nos mostra como resolver integrais definidas.

PARTE I - CÁLCULO DE UMA INTEGRAL DEFINIDA

Essa primeira parte do Teorema nos diz que podemos calcular uma integral definida integrando a função $f(x)$ e subtraindo o valor da integral do limite inferior (a) do valor da integral do limite superior (b).

Vamos ver isso no gráfico para entender melhor!



$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \text{ ou } \int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b$$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Exemplo:

Calcule a integral:

$$\int_0^3 (9-x^2)dx = ?$$

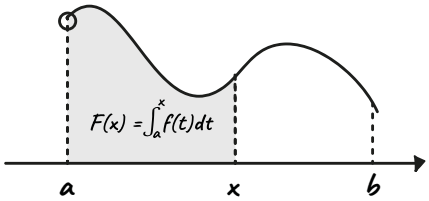
Só precisamos integrar a função, substituir os limites superior e inferior e subtrair os valores!

$$= 9x - \frac{x^3}{3}\Big]_{x=0}^{3} = (9.3 - \frac{3^3}{3}) - (9.0 - \frac{0^3}{3})$$

$$= (27 - 9) - 0 = 18$$

PARTE II - LIMITE DE INTEGRAÇÃO VARIÁVEL

A segunda parte nos ajuda a calcular uma integral definida com um limite superior de integração variável, por exemplo x.



$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \rightarrow f(x) = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right]$$

Ou seja, se integrarmos a função $f(t)$, de a até x, e depois fizermos a derivada em relação a x, vamos obter uma função $f(x)$.

Exemplo:

Resolva a seguinte integral:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3 dt\right] = ?$$

Vamos primeiro resolver a integral:

$$\left[\int_1^x t^3 dt = \frac{t^4}{4}\right]_1^x = \frac{4x^3}{4} - \frac{1}{4}$$

Agora vamos derivar em relação a x:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{x^4}{4} - 0 = x^3$$

5 CÁLCULO DE INTEGRAIS DEFINIDAS POR SUBSTITUIÇÃO

Devemos levar em conta os efeitos da substituição nos limites de cima e de baixo. Podemos fazer por dois métodos:

MÉTODO I

Determinamos primeiro a integral indefinida por substituição e, a partir disso, calculamos a integral definida.

Exemplo:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\, dx = ?$$

Resolva a seguinte integral:

Sendo $u = x^2 + 1 \rightarrow du = 2x.dx$

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\, dx = \tfrac{1}{2}\int_0^2 u^3 du = \frac{u^4}{8} = \frac{(x^2+1)^4}{8}\Big]_0^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8}$$

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\, dx = 78$$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

MÉTODO II

Usamos $u=g(x)$ para substituir os valores dos limites de integração.

Exemplo:

Vamos calcular a mesma integral do exemplo anterior:

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3\,dx$$

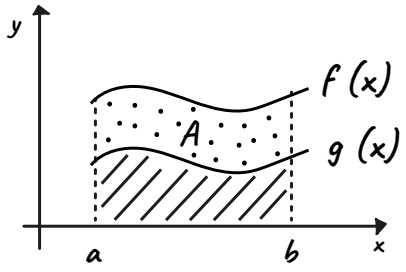
Definindo $u=x^2+1 \rightarrow du=2x.dx$ e calculando o novo limite superior para $x=2 \rightarrow 2^2+1=5$ e o limite inferior para $x=0 \rightarrow 0+1=1$. Substituindo os valores na integral, temos:

$$\frac{1}{2}\int_1^5 u^3du = \frac{u^4}{8}\Big]_1^5 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8}$$

6 ÁREA ENTRE DUAS CURVAS

ÁREA INTEGRANDO EM "X"

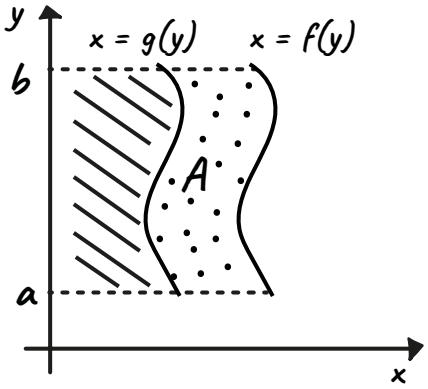
Relembrando as propriedades da integral definida (subtração de integrais), nada mais é do que a integral de uma função menos a outra.



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

ÁREA INTEGRANDO EM "Y"

Aqui vamos falar sobre funções dependentes da variável y. O que muda é que temos linhas variando na vertical, e não na horizontal, como estamos acostumados! Vamos conferir o desenho abaixo:



$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy$$

7 VOLUME POR DISCOS E ARRUELAS EM "X" E "Y"

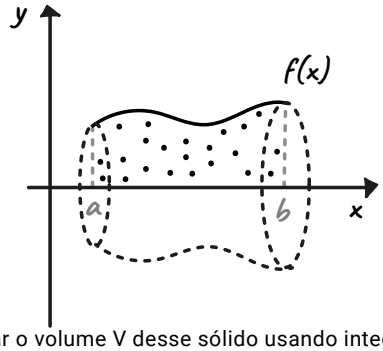
MÉTODO DO DISCO

Vamos imaginar que temos uma função $f(x)$, como na figura abaixo. Quando giramos essa função ao redor do eixo x, formamos um sólido, chamado sólido de revolução.

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

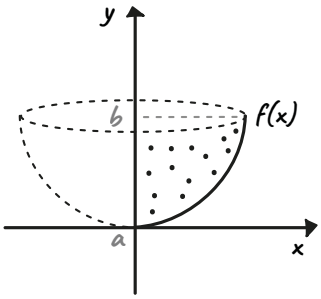


E adivinha? Podemos calcular o volume V desse sólido usando integrais!

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

Mas de onde saiu essa equação? Como estamos rotacionando a função $f(x)$, a base do sólido formado é um círculo de área $\pi r2$, sendo o nosso raio a própria função $f(x)$ e o comprimento do sólido dx.

Podemos fazer o mesmo quando uma função $f(y)$ é girada em torno do eixo y.

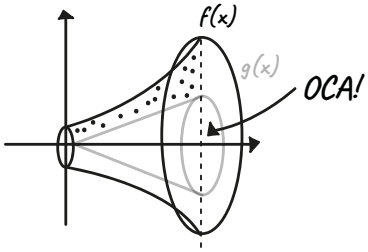


$$V = \int_a^b \pi[f(y)]^2 dy$$

IMPORTANTE: Neste caso, como estamos girando em torno do eixo y, precisamos da função dependente de y. Por exemplo: y= y=x vamos reescrever como y=x2.

MÉTODO DAS ARRUELAS

Utilizamos este método para calcular o volume de um sólido a partir da diferença do volume de outros dois. Para isso, basta seguirmos o mesma ideia da área entre duas curvas.



$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx - \int_a^b \pi[g(x)]^2 dx$$

8 INTEGRAÇÃO POR PARTES

Chegamos em um dos casos mais temidos pelos estudantes, mas que fica mais tranquilo quando resolvemos com calma e atenção!

O que nós vamos fazer aqui é expressar de outra forma a integral de um produto de funções, facilitando o nosso cálculo.

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Vamos ter integrais do tipo:

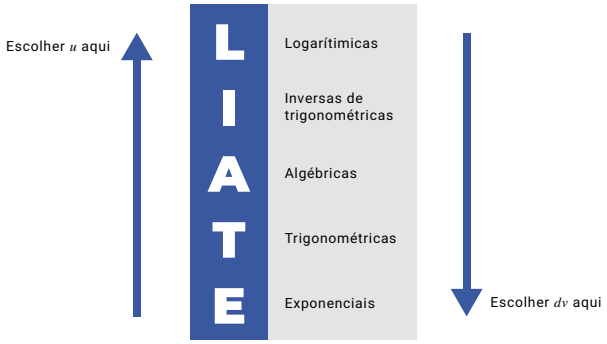
$$\int f(x).g(x)dx$$

E a ideia é transformá-las em:

$$\int u\ dv = u.v - \int v\ du$$

Então nosso objetivo é escolher uma função para ser o u e outra para ser o dv, obtendo uma nova integral. Bom, mas como fazemos essa escolha?

Uma dica legal, que geralmente funciona bem, é escolher pelo diagrama LIATE:



Agora ficou mais fácil de escolher u e dv né? Aí o que vamos ter que fazer é derivar a função escolhida como u e integrar a função dv. Vamos fazer um exemplo para deixar mais claro.

Exemplo:

Resolva a seguinte integral:

$$\int x \cos x\ dx = ?$$

Temos uma função algébrica (x) e uma função trigonométrica ($\cos x$), logo, escolhemos $u=x \rightarrow du=dx$ e

$$dv = \cos x\ dx \rightarrow v = \int dv = \int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x$$

Agora, precisamos fazer a substituição na equação geral que definimos lá em cima

$$\int u\ dv = u.v - \int v\ du:$$

$$\int x \cos x\ dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\ dx$$

$$= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

9 INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS

Se m e n forem números inteiros positivos, podemos calcular a integral acima através das relações trigonométricas:

n ímpar	Separar $\cos x$	Aplicar $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$ $u = \operatorname{sen} x$
m ímpar	Separar $\operatorname{sen} x$	Aplicar $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$ $u = \cos x$
m e n pares	Reduzir potências de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$	Aplicar $\operatorname{sen}^2 x = ½ (1 - \cos 2x)$ $\cos^2 x = ½ (1 + \cos 2x)$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Exemplo:

$$\int sen^4 x \,.\, cos^4 x \, dx = \int (sen^2 x)^2 \, (cos^2 x)^2 \, dx$$

Sendo $sen^2 x = ½ \, (1 - cos \, 2x)$ e $cos^2 x = ½ \, (1 + cos \, 2x)$, temos:

$$= \int [½ \, (1 - cos \, 2x)]^2 \, [½ \, (1 + cos \, 2x)]^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{16} \int (1 - cos^2 2x)^2 dx$$

Lembrando que $sen^2 x = 1 - cos^2 x$

$$= \frac{1}{16} \int sen^4 2x \, dx$$

A partir daqui, nós utilizamos o método de substituição u.du, sendo $u = 2x \rightarrow du = 2dx$

$$\frac{1}{16} \int (1 - cos^2 2x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{32} (⅜u - ¼ \, sen \, 2u + 1/32 \, sen \, 4u) + C$$

$$= \frac{3}{128} x - \frac{1}{128} sen \, 4x + \frac{1}{1024} sen \, 8x + C$$

PRODUTOS DE TANGENTES E SECANTES

$$\int tg^m \, x . \, sec^n \, x \, dx$$

n par	Separar $sec^2 x$	Aplicar $sec^2 x = tg^2 x + 1$ $u = tg \, x$
m ímpar	Separar $sec \, x \, tg \, x$	Aplicar $tg^2 x = sec^2 x - 1$ $u = sec \, x$
m par e n ímpar	Reduzir potências de $sec \, x$	Aplicar $tg^2 x = sec^2 x - 1$

SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Podemos realizar este método em três passos: escolher a substituição correta, resolver a integral e retornar a variável inicial.

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \, sen \, \Theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a \, tg \, \Theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a sec \, \Theta$

Exemplo:

Resolva a integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{4 - x^2}} = ?$$

Pensando nas substituições trigonométricas, você deve lembrar que:

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

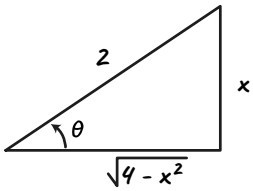
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

$a^2 - x^2 \rightarrow x = 2\ sen\ \Theta \rightarrow dx = 2\ cos\ \Theta\ d\Theta$, logo:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2\ cos\ \Theta\ d\Theta}{(2\ cos\ \Theta)^2\sqrt{4 - 4\ sen^2\ \Theta}} = \int \frac{2\ cos\ \Theta\ d\Theta}{(2\ sen\ \Theta)^2\ (2\ cos\ \Theta)}$$

$$\int \frac{d\Theta}{sen^2\ \Theta} = \tfrac{1}{4} \int cossec^2\ \Theta\ d\Theta = \tfrac{1}{4}\ cotg\ \Theta + C$$

Então, devemos expressar a cotangente em função de x:



$$cotg\ \theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

Substituindo na integral já resolvida, temos:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} + C$$

10 INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

É um método utilizado para separar uma divisão de polinômios em termos fáceis de integrar.

Exemplo:

Resolva a integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = ?$$

Lembrando que

$$\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}$$

Se multiplicarmos a equação acima por $(x-1)(x+2)$, obtemos:

$$1 = A(x+2)+B(x-1)$$

$$x = 1 \rightarrow 1 = A(1+2)+B(1-1) \rightarrow A = \tfrac{1}{3}$$

$$x = -2 \rightarrow 1 = A(-2+2)+B(-2-1) \rightarrow B = -\tfrac{1}{3}$$

Substituindo A e B

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{1}{3}}{x-1} - \frac{\frac{1}{3}}{x+2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 2} = \tfrac{1}{3} \int \frac{dx}{x-1} = -\tfrac{1}{3} \int \frac{dx}{x+2} = \tfrac{1}{3}$$

$$= \tfrac{1}{3}\ ln\ |x-1| - \tfrac{1}{3}\ |x+2| + C = \tfrac{1}{3} \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C$$