CÁLCULO

SÉRIES HARMÔNICAS E GEOMÉTRICAS

meSalva! | ENGENHARIA

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

1 DIFERENÇA ENTRE SEQUÊNCIA E SÉRIE

Antes de tudo, vamos esclarecer algo bem importante: a diferença entre sequência e série!

Quando falamos de sequência estamos nos referindo à sucessão de fatores, ou seja, uma lista ordenada de números. Exemplo: $1,2,3,4,..$

A Série é um somatório de termos de uma sequência de vários termos. Exemplo: a série da sequência $1,2,3,4$, é: $1+2+3+4=10$.

2 DEFINIÇÃO DE SÉRIE INFINITA

É o somatório dos termos que vão de $k=1$ até ∞, sendo k um número inteiro (sempre!).

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_k$$

3 SÉRIES GEOMÉTRICAS

Você deve lembrar que a progressão geométrica (PG) é uma sequência numérica que cresce ou decresce pelo produto de uma taxa crescente. Nessa progressão, a razão r entre um termo e outro é sempre igual (exceto para o primeiro termo). Assim, obtemos a PG multiplicando o termo anterior pela razão r.

Uma série geométrica é definida, então, como a soma de uma progressão geométrica infinita.

Para entender melhor, vamos considerar a série:

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots$$

Note que o primeiro termo é 1 e a razão da série é $r=2$. Assim, podemos deixar todos os termos em função do primeiro e da razão:

$$1 + 1.2^1 + 1.2^2 + 1.2^3 + ..$$

Como as séries geométricas seguem sempre esse padrão e um termo multiplicando uma razão, podemos generalizar, escrevendo uma série geométrica da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a.r^k = a.r^0 + a.r^1 + a.r^2 + \dots$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a.r^k = a + a.r^1 + a.r^2 + \dots$$

Tome cuidado pois k nem sempre será igual a 0! Pode acontecer de o início da série ser a partir de 2, por exemplo. Então não generalize e ache que o primeiro termo sempre será a “sozinho”!

$$\sum_{k=2}^{\infty} a.r^k = a.r^2 + a.r^3 + a.r^4 + \dots$$

SOMAS PARCIAIS

Geralmente, queremos fazer a soma da série até um determinado ponto, pois senão vamos ficar somando para sempre, né? O que podemos fazer é somar cada vez mais parcelas, resultando num somatório mais preciso.

Por definição, temos que a n-ésima soma parcial S_n depende do primeiro termo a_1 da série, da razão r e do número de termos n que estamos somando:

$$S_n = \frac{a_1 (r_n - 1)}{r - 1}$$

Exemplo:

Considere a série geométrica:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2.(2)^k$$

Vamos "abrir" a nossa série.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} 2.(2)^k = 4 + 8 + 16 + 32 + \ldots$$

Podemos fazer a soma parcial dos primeiros 4 termos da série:

$$S_1 = 4$$

$$S_2 = 4 + 8 = 12$$

$$S_3 = 4 + 8 + 16 = 28$$

$$S_4 = 4 + 8 + 16 + 32 = 60$$

Agora, vamos validar a equação definida anteriormente para a n-ésima soma parcial:

$$S_1 = \frac{4\,(2^1 - 1)}{2 - 1} = 4$$

$$S_2 = \frac{4\,(2^2 - 1)}{2 - 1} = 12$$

$$S_3 = \frac{4\,(2^3 - 1)}{2 - 1} = 28$$

$$S_4 = \frac{4\,(2^4 - 1)}{2 - 1} = 60$$

As somas parciais formam uma nova sequência $\{S_n\}_{n=1}^{+\infty}$, a partir da qual temos "pistas" sobre a convergência:

- Se a sequência $\{S_n\}$ converge, isto é, se os termos vão diminuindo e ficando cada vez menores, a série pode convergir!

- Se a sequência $\{S_n\}$ diverge, isto é, se os termos estão cada vez maiores, a série diverge!

CONVERGÊNCIA E DIVERGÊNCIA DE SÉRIES

Uma série convergente é aquela em que as somas parciais se tornam cada vez mais próximas de um valor finito quando o número de seus termos aumenta.

Já numa série divergente, nossa soma está "fora do controle" e tende para $\pm\infty$ à medida que o número de termos da série tende a infinito.

Para sabermos se uma série geométrica converge ou diverge, basta olharmos para o módulo da nossa razão:

se $|r| < 1 \rightarrow$ a série converge

se $|r| \geq 1 \rightarrow$ a série diverge

Só podemos calcular a soma de uma série que converge, pois se ela diverge, os termos são cada vez maiores e nossa soma será infinita. Então se a série geométrica converge, a soma será:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a.r^k = \frac{a}{1 - r}$$

CUIDADO! Se você for calcular uma soma infinita onde $k \neq 0$, preste atenção para fazer sempre o primeiro termo dividido por (1-razão)!

Exemplo:

Determine se a série abaixo converge ou diverge:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{5}{4^k}$$

Precisamos colocar nossa série na forma $\sum_{k=0}^{\infty} a.r^k$. Para isso, colocaremos um “k fictício” como expoente do número 1, pois lembre que 1n vai ser sempre igual a 1. Assim, temos o mesmo expoente no denominador e no numerador:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5\,\frac{5}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5\,\frac{1^k}{4^k} = \sum_{k=0}^{\infty} 5\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

Agora vamos identificar:

$$a = 5$$

$$r = 1/4$$

Como temos $r < 1$, nossa série converge!

4 SÉRIES HARMÔNICAS

Chamamos de harmônicas essas séries pois elas assemelham-se à proporcionalidade dos comprimentos de onda de uma corda ao vibrar. A série harmônica tem a seguinte cara:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Vamos analisar o comportamento da sequência lá no final, ou seja, como os termos se comportam quando $k \to \infty$:

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{1}{k}\right) = 0$$

Analisando a sequência, podemos dizer que ela converge para 0. Olhando por esse lado, temos a impressão que a série vai convergir, porque os termos estão ficando cada vez menores, não é mesmo? Mas, na verdade, a série harmônica diverge!

Que tal provarmos isso comparando a série harmônica com uma outra série de comportamento conhecido? Para isso, seguiremos os seguintes passos para escrever uma série de comportamento parecido:

1. Vamos agrupar os termos da série harmônica, de maneira a ficar com dois termos no primeiro grupo, quatro termos no segundo grupo, oito termos no terceiro grupo, e assim por diante:

(Note que o denominador do último termo de cada grupo é sempre uma potência de 2)

2. Agora, vamos substituir todos os termos de cada grupo pelo menor termo do grupo, criando uma outra série S:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \left\{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right\} + \left\{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right\} + \left\{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right\} \dots$$

3. Se substituirmos cada grupo pela soma dos seus termos, obtemos:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots$$

4. Os termos da série S não estão diminuindo e, portanto, essa série vai divergir. Note que essa série possui termos sempre menores do que a série harmônica. Sendo assim, a série harmônica é maior do que a série S e também vai divergir.

5 PROPRIEDADES ALGÉBRICAS DAS SÉRIES INFINITAS

Primeiro, vamos falar de uma propriedade muito importante: o comportamento divergente ou convergente de uma série não é alterado com a retirada de elementos finitos.

Exemplo:

Se a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ converge, logo $\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ converge, $\sum_{k=1056}^{+\infty} u_k$ também converge e assim por diante! O mesmo é válido para séries divergentes.

PROPRIEDADES DE SÉRIES CONVERGENTES

Considere as séries convergentes $\sum u_k$ e $\sum v_k$:

1. Regra da Soma:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k + v_k)$$

2 . Regra da Subtração:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k + \sum_{k=1}^{+\infty} v_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (u_k - v_k)$$

3 . Regra da Multiplicação por Constante:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c.u_k = c. \sum_{k=1}^{+\infty} u_k$$