FRAÇÕES

Uma fração é um número que pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$, onde identificamos ***a*** como sendo o *numerador* e ***b*** como o *denominador*, sendo *a* e *b* números inteiros.

Na verdade, usa-se fração para expressar uma parte de um todo. Por exemplo: imagine uma barra de chocolate que é formada por 24 tabletes. Se você comer de uma vez 5 tabletes, estará comendo uma *fração* da barra como um todo. Na verdade estará comendo 5 de 24 tabletes. Nós podemos expressar isso como $\frac{5}{24}$. Ou seja, 5 *por* 24.

Há muitos detalhes de teoria que são interessantes, mas, como estamos indo direto ao ponto, revisando, vamos focar no principal! Ou seja, como manipular frações!

EXPRESSANDO FRAÇÕES

Por exemplo: se temos $\frac{1}{2}$, lemos 1 *por* 2 ou 1 *dividido por* dois. Estamos dividindo 1 em duas partes, logo, teremos como resultado exatamente metade de 1 (que é 0,5). Óbvio, não é?

Tão óbvio que podemos fazer o caminho inverso – e saber fazer o caminho inverso é **muito importante**!

Por exemplo, 0,5 eu poderia escrever como sendo 5/10 (assim como 0,3 é $\frac{3}{10}$, $\frac{6}{100}$ é 0,06 e assim por diante). Se você notar, tanto o *numerador* quanto o *denominador* de 5/10 são divisíveis por 5. De fato, dividindo o *numerador* e *denominador* de 5/10 por 5, resulta em 1/2. Chamamos isso de *frações equivalentes*. Se temos *divisores comuns* "em cima e embaixo", podemos "simplificar" a fração. Na verdade, estamos fazendo uma decomposição em fatores de números primos – mas se não entender expresso assim, vai por mim, não é um problema. ;)

Abaixo seguem alguns exemplos:

$\dfrac{2^{(\div 2)}}{12_{(\div 2)}} = \dfrac{1}{6}$ $\dfrac{6^{(\div 2)}}{8_{(\div 2)}} = \dfrac{3}{4}$ não dá para simplificar mais $\dfrac{25^{(\div 5)}}{40_{(\div 5)}} = \dfrac{5}{8}$

CAMINHO INVERSO:

$$0{,}625 = \frac{625^{(\div 5)}}{1000_{(\div 5)}} = \frac{125^{(\div 5)}}{200_{(\div 5)}} = \frac{25^{(\div 5)}}{40_{(\div 5)}} = \frac{5}{8}$$

OU

625	5
125	5
25	5
5	5
1	$= 5.5.5.5 = 5^4$

1000	2
500	2
250	2
125	5
25	5
5	5
1	$2^3.5^3$

$$\frac{625}{1000} = \frac{5\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}}{2\cdot2\cdot2\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{5}} = \frac{5}{8}$$

$$2{,}5 = \frac{25^{(\div 5)}}{10_{(\div 5)}} = \frac{5}{2}$$

OPERAÇÕES COM FRAÇÕES

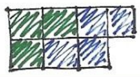
SOMA e SUBTRAÇÃO

Para somar ou subtrair números expressos como frações basta seguir o procedimento abaixo. Não importa se as frações estão em suas formas mais simples (simplificadas ao máximo) ou não, mas obviamente fazer a soma ou subtração antes de somá-las ou subtraí-las torna o procedimento mais simples.

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{3}{7}+\frac{4}{7}}_{\text{DENOMINADORES IGUAIS}} = \frac{3+4}{7} = \frac{7}{7} = 1$$

DENOMINADORES IGUAIS → SOMA OS NUMERADORES

• ESTOU SOMANDO 3 PARTES DE 7 COM 4 PARTES DE 7, O QUE COMPLETA 7 PARTES DE 7



$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6} = \frac{4+5}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$$

m.m.c dos denominadores

3	-	6	2
1	-	3	3
1	-	1	= 2.3 = 6

OUTRO EXEMPLO:

$$\Rightarrow \frac{5}{16}+\frac{3}{16} = \frac{5+3}{16} = \frac{8^{(\div 2)}}{16_{(\div 2)}} = \frac{4^{(\div 2)}}{8_{(\div 2)}} = \frac{1}{2}\ (=0,5)$$

$$\Rightarrow \frac{3}{17}+\frac{4}{17} = \frac{3+4}{17} = \frac{7}{17}$$

OUTRO EXEMPLO:

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{6}-\frac{1}{4} = \frac{8+10-3}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

m.m.c

3	-	6	-	4	2	
3	-	3	-	2	2	
3	-	3	-	1	3	
1	-	1	-	1	= 2.2.3 = 12	

MULTIPLICAÇÃO e DIVISÃO

Mais fácil ainda! Na multiplicação de frações basta **multiplicar numerador por numerador e denominador por denominador**. Na divisão de frações, basta inverter a fração “de baixo” e multiplicá-la pela “de cima”. Seguem alguns exemplos:

MULTIPLICAÇÃO:

$$\frac{3}{4} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{28}$$

$$\frac{4}{27} \times \frac{3}{5} = \frac{12}{135} = \frac{4}{45}$$

$$\frac{3}{2} \times \frac{5}{2} \times \frac{7}{11} = \frac{105}{44}$$

DIVISÃO:

$$\frac{3/4}{5/7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{21}{20}$$

$$\frac{\frac{3}{4} + \frac{5}{7}}{\frac{5}{7} - \frac{3}{4}} = \frac{\frac{21 - 20}{28}}{\frac{20 - 21}{28}} = \frac{1/28}{-1/28} = \frac{1}{\cancel{28}} \times \left(\frac{-\cancel{28}}{1}\right) = -1$$

m.m.c

$$\begin{array}{cc|l} 7 - 4 & & 2 \\ 7 - 2 & & 2 \\ 7 - 1 & & 7 \\ \hline 1 - 1 & & = 28 \end{array}$$

POTENCIAÇÃO

O principal em lidar com potências é entender as propriedades operacionais que existem e – muito importante – saber que elas são uma via de duas mãos. Ou seja, uma operação “de ida” também permite uma operação “de volta”. Essa abordagem pode salvar você de situações aparentemente complicadas que se tornam triviais se percebemos isso.

Vamos às operações que existem, com alguns exemplos práticos:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\quad 3^4 \cdot 3^2 = 3^{4+2} = 3^6$

OUTRA FORMA DE VER: $3^4 \cdot 3^2 = \underbrace{\overbrace{3\cdot3\cdot3\cdot3}^{3^4}\cdot\overbrace{3\cdot3}^{3^2}}_{3^6} = 3^{4+2} = 3^6$

- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad \dfrac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 = 27$

OUTRA FORMA DE VER: $\dfrac{3^5}{3^2} = \dfrac{3\cdot3\cdot3\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}\cdot\cancel{3}} = 3^3 = 27$

- $(a^x)^y = a^{x\cdot y}$ $\quad (7^3)^3 = 7^3\cdot7^3\cdot7^3 = 7^{3\times3} = 7^9$

$(2^3)^2 = \underbrace{2^3\cdot2^3}_{(2^3)^2} = \underbrace{2^2\cdot2^2\cdot2^2}_{(2^2)^3} = 2^{2\times3} = 2^6$

- $\sqrt[y]{a^x} = a^{x/y}$ $\quad \sqrt[2]{3^3} = 3^{3/2} = 3^{1,5}$

$\sqrt[30]{7^8} = 7^{8/30} = 7^{4/15}$

- $a^x\cdot b^x = (a\cdot b)^x$ $\quad 2^4\cdot3^4 = (2\cdot3)^4 = 6^4 = 1.296$

- $\dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$ $\quad \dfrac{5^6}{2^6} = \left(\dfrac{5}{2}\right)^6$

Como dito, é importante notar que as operações *são reversíveis*; ou seja, funcionam tanto numa direção quanto na outra. Veja estes exemplos:

IDA	**VOLTA**
$3^3 \times 3^x = 3^{x+3}$	$2^{n+3} = 2^n \times 2^3 = 27 \times 2^n$
$\frac{9^2}{9^p} = 9^{2-p}$	$8^{r-6} = \frac{8^r}{8^6}$
$4^h \times 3^h = (4 \times 3)^h$	$24^t = (2^3 \times 3)^t = 2^{3t} \times 3^t$
$\frac{2^r}{3^r} = \left(\frac{2}{3}\right)^r$	$\left(\frac{2}{x}\right)^y = \frac{2^y}{x^y}$

POTÊNCIAS DE DEZ

Também é importante lembrar que potências de dez são “abreviações” do número 1 acompanhado de zeros à direita ou à esquerda. Por exemplo:

- $10^2 = 100$
- $10^{-2} = 0{,}01$

Note uma característica muito importante: o expoente que eleva o 10 é o número de zeros existentes na resposta, variando apenas que quando a potência de dez é positiva os zeros são à direita do 1; quando a potência de dez é negativa, os zeros são à direita do 1 e acrescentando a vírgula à direita do último zero à esquerda. Se conseguirmos entender isso, qualquer potência de dez não será mais problema para nós.

10^0 = 1	10^0 = 1
10^2 = 1**00**	10^{-2} = **0,0**1
10^3 = 1.**000**	10^{-3} = **0,00**1
10^5 = 1**00.000**	10^{-5} = **0,0000**1
10^7 = 1**0.000.000**	10^{-7} = **0,000000**1
10^{11} = 1**00.000.000.000**	10^{-11} = **0,0000000000**1

RADICIAÇÃO

Pode ser vista apenas como uma uma consequência da potenciação, sendo nada mais do que um expoente fracionário. Porém, expressões na forma de raízes guardam algumas propriedades interessantes de serem analisadas com mais cuidado.

Quando olhamos, por exemplo, a raiz **quadrada** $\sqrt{11025}$, podemos pensar que não temos como saber o resultado, pois foge da magnitude de raízes que usualmente resolvemos, mas como vimos em potenciação, podemos expressar a raiz anterior na forma $(11.025)^{1/2}$. Mesmo assim essa forma de expressar ainda não nos dá dicas do valor esperado como resultado. O segredo está em *decompor o número em fatores de números primos*. Por exemplo:

11.025	3
3.675	3
1.225	5
245	5
49	7
7	7
1	
	$= 3^2.5^2.7^2 =$ 11.025

Logo, a expressão $\sqrt{11.025}$ pode ser reescrita como $\sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2}$, que por sua vez é equivalente a $\left(3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2\right)^{1/2}$. Lembrando a propriedade de potenciação que diz que $(a^x)^y = a^{x \times y}$, temos que:

$$\sqrt{11.025} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \left(3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2\right)^{1/2} = 3^{\frac{2}{2}} \cdot 5^{\frac{2}{2}} \cdot 7^{\frac{2}{2}} = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$$

e o mesmo pode ser feito sempre que algo parecido for possível, para qualquer raiz *enésima*, como por exemplo:

$$\sqrt[3]{1.080} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3 \cdot 5} = \left(2^3 \cdot 3^3 \cdot 5\right)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} \cdot 3^{\frac{3}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} = 2 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}$$

Já quando temos uma multiplicação de raízes de *mesmo índice*, podemos agrupar ou agrupar a multiplicação dentro da mesma raiz:

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$ → o inverso também é válido → Ex: $\sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{2} \times \sqrt{3}$

Na verdade, o que estamos fazendo também é apenas aplicar a propriedade de potenciação que diz que $a^x \times b^x = (a \times b)^x$, mas saber diretamente, sem precisar invocar o conceito de raiz como expoente, é mais ágil para hora da prova.

Quando temos multiplicação de raízes de índices diferentes, *basta* (hehe...) calcular o *m.m.c.* dos índices de cada raiz individual, colocar os dois radicais dentro de uma mesma raiz com novo índice igual ao *m.m.c.* calculado e elevar cada um dos radicais, agora dentro da nova raiz de novo índice, ao valor que resulta da divisão entre o novo índice pelo antigo. =O → Exemplos para ficar mais claro:

- $\sqrt[3]{3} \times \sqrt[4]{6} = \sqrt[12]{3^{\frac{12}{3}} \times 6^{\frac{12}{4}}} = \sqrt[12]{3^4 \times 6^3}$

m.m.c. dos expoentes antigos

3 - 4	2	
3 - 2	2	
3 - 1	3	
1 - 1		
	= 2·2·3 = 3·4 = **12**	

$\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[2]{3} = \sqrt[6]{4^{6/3} \cdot 3^{6/2}} = \sqrt[6]{4^2 \cdot 3^3}$

novo índice dividido pelo antigo

m.m.c

3 - 2	2	x
3 - 1	3	
1 - 1	2.3 = 6 ← novo índice	

Quando temos raízes dentro de outras raízes, uma raiz equivalente é a raiz dada pela raiz com índice igual ao resultado da multiplicação de todos os índices. Exemplo:

- $\sqrt[3]{\sqrt[5]{\sqrt{45}}} = \sqrt[3\times5\times2]{45} = \sqrt[30]{45}$

Quando temos um número intruso entre as raízes, ele entra para dentro da raiz final elevado em expoente igual ao produto do seu próprio expoente pelos índices das raízes à sua direita. Exemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2^2\sqrt[5]{\sqrt[7]{5}}}} = \sqrt[3\times4\times5\times7]{2^{2\times5\times7} \times 5} = \sqrt[420]{2^{70} \times 5}$$

E daria para ir um pouco mais utilizando as propriedades...

$$\sqrt[420]{2^{70} \times 5} = \left(2^{70} \times 5\right)^{\frac{1}{420}} = 2^{\frac{70}{420}} \times 5^{\frac{1}{420}} = 2^{\frac{1}{6}} \times 5^{\frac{1}{420}} = \sqrt[6]{2} \times \sqrt[420]{5}$$

... e assim a gente vai brincando... =)