CÁLCULO

INTEGRAIS DUPLAS

meSalva! | ENGENHARIA

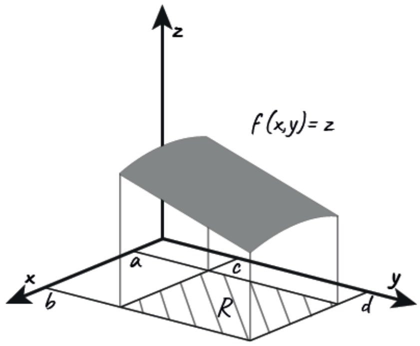
COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE INTEGRAIS DUPLAS

Nas integrais simples, nós "somamos" os valores de uma função f(x) em comprimentos dx. Agora, nas integrais duplas fazemos o mesmo, mas para funções de duas variáveis f(x,y) em uma área dA= dx . dy, sendo a região de integração um retângulo R= [a,b] x [c,d]. O gráfico abaixo deixa mais claro.



$$\iint_R f(x,y)\, dx\, dy \text{ ou } \iint_R f(x,y)\, dA$$

sendo A a área de R

ATENÇÃO! Devemos começar sempre resolvendo a integral de dentro! E também é importante colocarmos os limites que são constantes na integral mais externa, para no final obtermos um valor numérico.

Exemplo:
Resolva a seguinte integral

$$\int_0^2\int_0^{x^2} y\, dy\, dx$$

Vamos deixar a integral de fora um pouquinho de lado, e vamos começar pela integral de dentro:

$$\int_0^{x^2} y\, dy = \left[\frac{y^2}{2}\right]^{x^2} = \frac{x^4}{2} - \frac{0^4}{2} = \frac{x^4}{2}$$

Agora, substituímos esse resultado na integral:

$$\int_0^2 \frac{x^4}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^4\, dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2^5}{5} - \frac{0^5}{5}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{5} = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

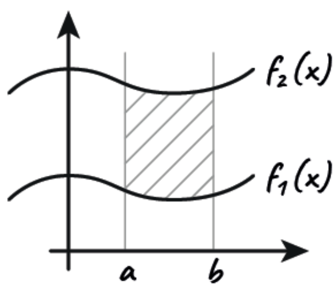
Ou seja:

$$\int_0^2\int_0^{x^2} y\, dy\, dx = \frac{16}{5}$$

2 REGIÕES NÃO RETANGULARES

TIPO I

Quando podemos limitar nossa região com barras verticais.



$$a \leq x \leq b$$

$$f_1(x) \leq y \leq f_2(x)$$

$$\int_a^b\int_{f_1}^{f_2} h(x,y)\, dy\, dx$$

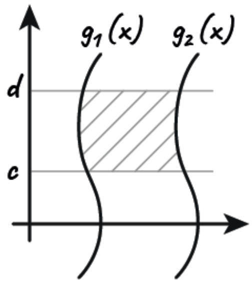
COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

TIPO II

Quando podemos limitar nossa região com barras horizontais.



$$c \le y \le d$$

$$g_1(x) \le y \le g_2(x)$$

$$\int_c^d \int_{g_1}^{g_2} h(x,y)\, dy\, dx$$

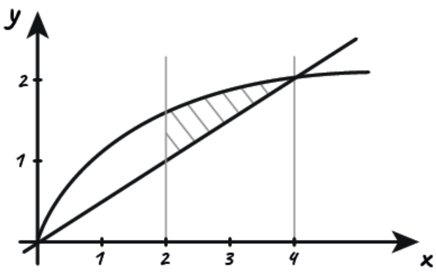
Obs.: quando tivermos uma região que não se encaixa em nenhum dos dois tipos, podemos dividi-la em duas partes!

Exemplo:

Calcule $\int\int_R x.y\, dA,$ onde R é uma região entre:

$$y = \frac{x}{2} \;;\; y = \sqrt{x} \;;\; x = 2 \text{ e } x = 4$$

Esboço do gráfico:



$$2 \le x \le 4$$

$$\frac{x}{2} \le y \le \sqrt{x}$$

Logo, temos uma região do Tipo I. Vamos à integral:

$$\int_2^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} x\, .\, y\, dy\, dx$$

$$= \int_2^4 [x.\frac{y^2}{2}]_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 [x.\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\cdot(\frac{x}{2})^2]\, dx$$

$$= \int_2^4 [\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}]\, dx = [\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4}]_2^4$$

$$= \frac{4^3}{6} - \frac{4^4}{32} - [\frac{2^3}{6} - \frac{2^4}{32}] = \frac{11}{6}$$

3 MUDANÇA NA ORDEM DE INTEGRAÇÃO

Quando vemos que é muito complicado integrar em y, por exemplo, e que em x fica mais fácil (ou vice-versa), podemos inverter os limites de integração. Passos:

1. Fazer um esboço da região de integração.

2. Escrever a região de outra forma: Tipo I ↔ Tipo II.

3. Reescrever a integral com os diferenciais invertidos e com os novos intervalos.

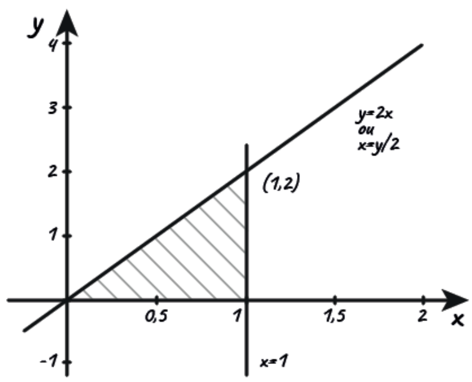
4. Integrar!

Exemplo:

$$\text{Calcule } \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx\, dy$$

Como não há antiderivada elementar de e^{x^2}, não conseguimos resolver a integral primeiro em relação a x.

Esboço do gráfico



$$\frac{x}{2} \leq x \leq 1$$

$$0 \leq y \leq 2$$

Fixando x de 0 a 1, y irá variar de 0 a 2x. Reescrevemos a integral:

$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 2x \,.\, e^{x^2}\, dx = e^{x^2}\Big|_0^1 = e - 1$$

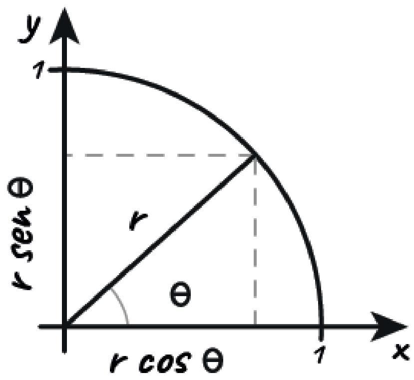
4 COORDENADAS POLARES

Usamos coordenadas polares quando a integral dupla é mais bem adaptada a esse tipo de plano, como no caso da região de integração ter circunferências/elipses ou a função a ser integrada tiver termos em x^2 e y^2.

Precisamos de duas informações para fazer a mudança de plano:

1. A distância até a origem (r).

2. O ângulo (θ) que o segmento r faz com o eixo x.



$$x = r\cos\theta$$

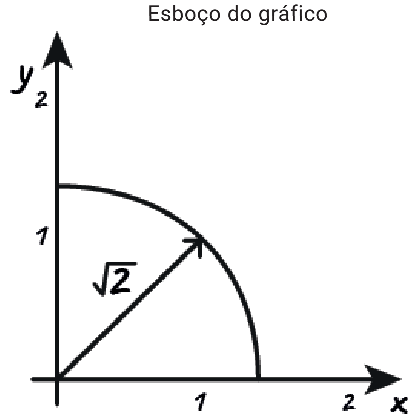
$$y = r\,sen\,\theta$$

$$dA = r\,dr\,d\,\theta$$

Exemplo:

Calcule, convertendo para coordenadas polares, a seguinte integral $\iint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, sendo R a região do plano limitada no 1° quadrante pelo círculo $x^2 + y^2$.

Esboço do gráfico



A região R corresponde à região interior ao círculo de centro na origem e raio $\sqrt{2}$, no 1° quadrante. Então R corresponde ao retângulo polar:

$$0 \le r \le \sqrt{2}$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

Vamos converter a integral para polar, substituindo no integrando

$$x^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$y^2 = r^2\,sen^2\,\theta$$

$$dA = r\,dr\,d\,\theta$$

Lembre que $\cos^2\theta + sen^2\,\theta = 1$, portanto a integral fica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{r^2}\,r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{2}} r\,dr\,d\theta$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{2}\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sqrt{2})^3}{3}d\theta$$

$$= \left[\frac{(\sqrt{2})^3}{3}.\theta\right]^{\frac{\pi}{2}} = \frac{(\sqrt{2})^3\pi}{6} = \frac{(\sqrt{2})^3\pi}{6} = \frac{2\sqrt{2}\pi}{6} = \frac{\sqrt{2}\pi}{3}$$

FORMAS ESPECIAIS DE COORDENADAS POLARES

Coordenadas elípticas	**Coordenadas polares deslocadas**
- Usamos quando : o A região tem uma elipse do tipo: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ o A função integrada tem um termo: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ - A mudança é: $x = a\,r\cos\theta$ $y = b\,r\,\text{sen}\,\theta$	- Usamos quando: o A região tem uma circunferência com centro (c,d) do tipo: $(x-c)^2+(y-d)^2 = raio^2$ - A mudança é: $x = r\cos\theta + c$ $y = b\,r\,\text{sen}\,\theta + d$ **Obs.:** nem sempre essa mudança facilita a questão!