FÍSICA

CINEMÁTICA

meSalva! | ENGENHARIA

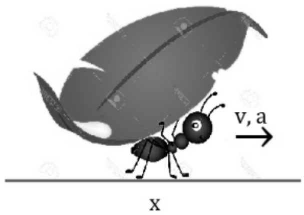
COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

1 INTRODUÇÃO À CINEMÁTICA

Imagine que estamos observando a formiguinha abaixo:



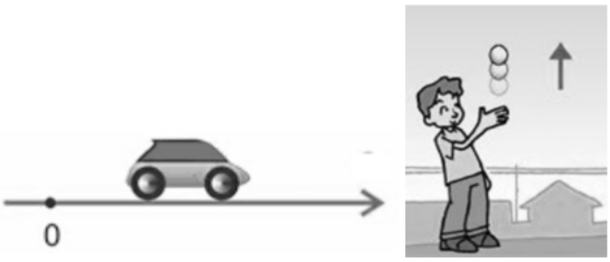
Sabemos que ela caminha com uma determinada velocidade v, com uma aceleração a e que a cada instante t, ela avança sua posição x. Se quisermos descrever o que ela está fazendo, isto é, o seu movimento, estaremos falando de cinemática.

A cinemática é um campo da física que estuda o movimento de corpos ou partículas, mas sem se preocupar com a força exercida sobre eles, a qual dá origem ao movimento.

2 MOVIMENTO RETILÍNEO

Em um movimento retilíneo, os corpos realizam trajetórias retas, ou seja, o percurso realizado em um determinado espaço é retilíneo, com base em um sistema de coordenadas predefinido.

O movimento pode ser na horizontal, como carro em movimento, ou na vertical, como o lançamento de um objeto.



Vamos falar um pouquinho sobre alguns conceitos que estão sempre presentes no estudo da movimento. É muito importante que você entenda bem cada um deles!

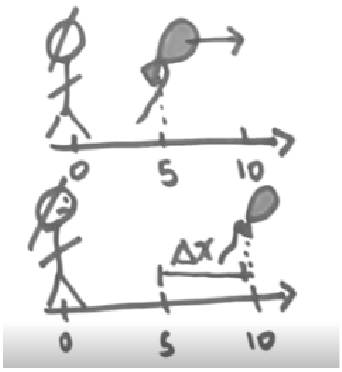
POSIÇÃO

A posição $x(t)$ é o lugar que o corpo ocupa no espaço. Precisamos definir um eixo de referência, por exemplo x, e uma posição de origem $x=0$. A seta do eixo indica para onde as posições são crescentes.

DESLOCAMENTO

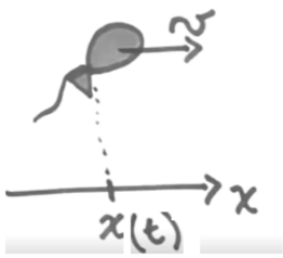
O deslocamento Δx é uma variação na posição de um corpo, que ocorre em um intervalo de tempo Δt. Observe a imagem abaixo, o balão vai da posição inicial $x_i = 5$ para a posição $x_f = 10$. Portanto, o deslocamento dele será:

$$\Delta x = x_f - x_i$$



VELOCIDADE MÉDIA E INSTANTÂNEA

A relação entre o deslocamento Δx e o intervalo de tempo em que ele ocorre Δt, é chamada de velocidade v.



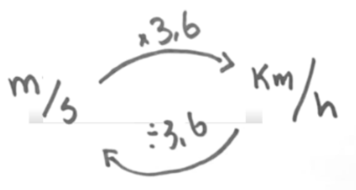
A velocidade média $v_{méd}$ do corpo durante um deslocamento em uma variação de tempo é definida por:

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea $v(t)$ indica a velocidade em um instante específico. Assim, estamos interessados em saber a velocidade $v(t)$ num instante onde t é muito pequeno, ou seja, $t \to 0$. Então a velocidade instantânea é a taxa de variação da posição em relação ao tempo:

$$v(t) = \frac{dx}{dt}$$

IMPORTANTE! No Sistema Internacional de Unidades (SI), a velocidade é dada em m/s, porém, é muito comum encontrarmos valores de velocidade em km/h. Para trocar de unidades, multiplicamos a velocidade em m/s por 3,6 para obter em km/h, e dividimos para fazer o inverso:



Exemplo:

Vamos encontrar a $v_{méd}$ entre $t_1 = 0$ s e $t_2 = 1$ s e a $v(t)$ em $t_1 = 0$ s e $t_2 = 1$ s para um corpo com uma posição descrita por:

$$x(t) = 4t^2 + 12$$

Note que para a $v_{méd}$ o cálculo é feito para um intervalo de tempo, enquanto que para $v(t)$

estamos interessados em dois instantes, separadamente. Vamos começar pela $v_{méd}$:

Primeiro, precisamos calcular o deslocamento Δx. Para isso, calculamos $x(t)$ para $t_1 = 0$ s e $t_2 = 1$s:

$$x_1(0) = 4.0^2 + 12 = 12\ m$$
$$x_2(1) = 4.1^2 + 12 = 16\ m$$
$$\Delta x = x_2 - x_1 = 16 - 12 = 4\ m$$

O intervalo de tempo Δt é, intuitivamente:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 1 - 0 = 1\ s$$

Agora, basta substituirmos Δx e Δt na equação da velocidade média:

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4}{1} = 4\ m/s$$

Para determinarmos a velocidade instantânea, vamos ter que relembrar um pouquinho as técnicas de derivação. Temos que derivar a equação da posição $x(t)$ em relação a t:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d(4t^2+12)}{dt} = 4.2.t + 0 = 8t$$

$$v\ (t) = 8t$$

Precisamos substituir na equação acima em $t_1 = 0$ s e $t_2 = 1$ s, para obtermos a velocidade instantânea:

$$v_1(0) = 8.0 = 0\ s \rightarrow \text{o corpo está parado}$$
$$v_2(1) = 8.1 = 8\ s$$

Portanto, o corpo estava parado no instante $t_1 = 0$ s e aumentou sua velocidade até 8 m/s em $t_2 = 1$ s, o que indica uma aceleração!

ACELERAÇÃO MÉDIA E INSTANTÂNEA

Imagine um carro parado no sinal vermelho, sua velocidade é $v_1 = 0$. Quando o sinal abre, o carro precisa andar, senão todo mundo vai começar a buzinar, né? Então vamos ter uma velocidade $v_2 \neq 0$ e $v_2 \neq v1$ e essa variação de velocidade Δv leva um certo tempo Δt para acontecer.

A relação entre a Δv e Δt é o que chamamos de aceleração, sendo m/s2 sua unidade no SI. A aceleração média $a_{méd}$ é dada por:

A aceleração instantânea $a(t)$, isto é, num instante específico, é dada por:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Lembrando que $v(t) = \frac{dx}{dt}$, podemos substituir na equação de $a(t)$, obtendo a derivada segunda da posição:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

SENTIDO DA ACELERAÇÃO

Considere a figura abaixo, onde temos um corpo com velocidade v no sentido positivo do eixo x. Se ele sofrer uma aceleração a no sentido positivo, a velocidade do corpo vai sofrer uma variação no sentido da aceleração, ou seja, ela vai aumentar e teremos uma velocidade $v_1 > v$.

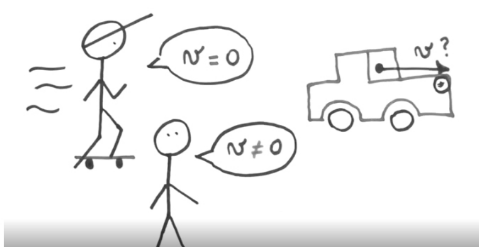
Mas, se tivermos uma aceleração no sentido contrário da velocidade, isto é, no sentido negativo do eixo x, a velocidade vai ser reduzida com o tempo e teremos $v_2 < v$.

3 MOVIMENTO RELATIVO E REFERENCIAIS

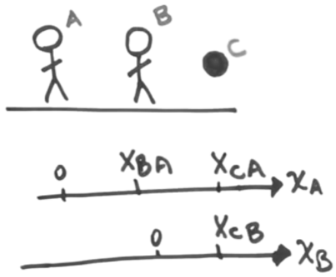
Dizemos que um corpo está em movimento quando sua posição muda ao longo do tempo. Assim a noção de movimento e de repouso de um corpo móvel é sempre relativa ao outro corpo, o qual chamamos de referencial.

Considere que temos duas pessoas observando um carro que anda numa velocidade vc. Para uma pessoa parada, observando da calçada, o carro está se movimentando com uma velocidade $v_c \neq 0$. Entretanto, para uma pessoa andando de skate na mesma velocidade vc que o carro, ela terá a impressão de que o carro está parado, como se $v_c = 0$.

Mas se nós pensarmos na terra fazendo seu movimento de rotação, até a pessoa parada estará em movimento! Então tudo depende do referencial escolhido!



Considere duas pessoas A e B, e um corpo C. Se fizermos dois eixos de referenciais diferentes, x_A e x_B, teremos o seguinte:



A posição x_{CA} do corpo C pode em relação ao referencial x_A, vai ser a soma da posição do corpo medida pelo referencial x_B, mais a posição da pessoa B em relação a A:

$$x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}$$

Se as pessoa B e o corpo C estiverem em movimento, podemos obter a velocidade fazendo a derivada da posição x_{CA} em relação ao tempo t:

$$\frac{d}{dt}\left(x_{CA} = x_{CB} + x_{BA}\right) \rightarrow v_{CA} = x_{CB} + v_{BA}$$

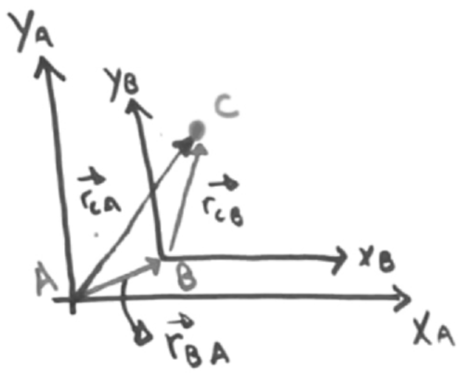
Sendo que vBA é a velocidade em que A e B estão se distanciando um do outro. Se derivarmos a expressão da velocidade, teremos a aceleração a_{CA}:

$$\frac{d}{dt}\left(v_{CA} = v_{CB} + v_{BA}\right) \rightarrow a_{CA} = a_{CB} + a_{BA}$$

Porém, vamos considerar a_{BA} a como nula, pois a velocidade v_{BA} pode ser nula (A e B estão parados) ou constante (A e B estão se afastando com uma velocidade constante). A partir disso, tiramos que a aceleração medida pelos dois referenciais é a mesma. Acontece que os referenciais estão parados um em relação ao outro e portanto, dizemos que são referenciais inerciais. Veremos melhor isso no próximo resumo, sobre a dinâmica.

MOVIMENTO RELATIVO EM 2D

Vamos expandir a ideia de movimento relativo para 2 dimensões. Considere a figura abaixo:



COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Sendo o referencial A com eixos x_A e y_A e o referencial B com eixos x_B e y_B. A posição r_{CA} de C em relação a A é dada por:

$$\vec{r}_{CA} = \vec{r}_{CB} + \vec{r}_{BA}$$

A partir disso, podemos obter a velocidade vCA e a aceleração aCA:

$$\vec{v}_{CA} = \vec{v}_{CB} + \vec{v}_{BA}$$
$$\vec{a}_{CA} = \vec{a}_{CB}$$

4 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME (MRU)

Dizemos que um corpo está em movimento retilíneo uniforme quando ele se desloca com uma velocidade constante (portanto a aceleração é nula) e em uma trajetória reta.

A posição de um corpo em MRU é dada por:

$$x = x_0 + v.t$$

A velocidade é:

$$v_{méd} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow velocidade\ média$$

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow velocidade\ instantânea$$

VELOCIDADE ESCALAR MÉDIA

Chamamos de grandeza escalar quando podemos expressar uma grandeza física apenas com seu valor numérico e sua unidade de medida. Ou seja, ela não depende de uma direção e de um sentido, como no caso de grandezas vetoriais.

Até agora, falamos sobre a velocidade média $v_{méd}$, que é uma grandeza vetorial. A diferença entre ela e a velocidade escalar média S_m é que esta última depende da distância total percorrida em um intervalo de tempo, e não da posição inicial e final do corpo neste intervalo.

Exemplo:

Considere a situação 1, onde um corpo partiu da posição 0 e parou na posição de 10 m. E a situação 2, onde o corpo partiu de 0, foi até a posição 10 m e voltou até 0.

Vamos calcular a velocidade média e a velocidade escalar para cada situação.

Na situação 1, o deslocamento será de 10 m e a distância percorrida também será 10 m:

$$v_{méd} = \frac{10}{1} = 10\ m/s$$

$$S_{méd} = \frac{10}{1} = 10\ m/s$$

Na situação 2, o deslocamento será nulo e a distância percorrida será 20 m (10 m da ida + 10 m da volta):

$$v_{méd} = \frac{0}{1} = 0\ m/s$$

$$S_{méd} = \frac{20}{1} = 20\ m/s$$

VELOCIDADE ESCALAR INSTANTÂNEA

Lembra que falamos antes que uma grandeza escalar não depende do sentido e da direção? Assim, temos que a velocidade escalar instantânea $S(t)$ será o módulo da velocidade instantânea $v(t)$:

$$S(t) = |v(t)| = \left|\frac{dx}{dt}\right|$$

5 MOVIMENTO RETILÍNEO UNIFORME VARIÁVEL (MRUV)

No MRUV, temos uma aceleração a constante, o que provoca uma mudança de velocidade ao longo do tempo e do espaço percorrido.

ACELERAÇÃO CONSTANTE

Neste caso, a aceleração instantânea $a(t)$ vai ser igual à aceleração média $a_{méd}$ e podemos deduzir as seguintes equações:

$$a(t) = a_{méd} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Considerando um tempo inicial $t_0 = 0$, podemos dizer que:

$$a = = \frac{v - v_0}{t}$$

Isolando v, obtemos a expressão:

$$v = v_0 + at$$

Para o deslocamento com aceleração constante, podemos obter a seguinte equação, a partir de algumas deduções:

$$\Delta x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

Ou ainda:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

$$v^2 = v^2_0 + 2.a.\,\Delta x$$

ACELERAÇÃO EM QUEDA LIVRE

Aqui temos um caso em que a aceleração é constante, mais especificamente, é a aceleração da gravidade (geralmente utilizamos g= 9,8 m/s2). Quando deixamos cair uma maçã, por exemplo, ela é puxada por uma força da gravidade causada pelo centro da terra.

Aqui, vamos utilizar as equações que encontramos antes:

$$v = v_0 + at$$

$$\Delta x = v_0 t + \frac{at^2}{2}$$

LANÇAMENTO VERTICAL

Quando um corpo é arremessado para cima, ele vai subir até o ponto em que $v = 0$ e a partir daí, ele começa a descer. A aceleração sobre este corpo é constante, e é a aceleração da gravidade g.

Vamos imaginar que uma maçã foi jogada para cima, a partir do solo, e vamos separar esse arremesso em duas etapas: a subida e a descida.

Sabemos que a maçã vai subir até uma posição x, onde v=0. Como o sentido do movimento é contrário ao sentido da aceleração da gravidade, colocamos o sinal negativo antes de g.

$$v = v_0 - gt \rightarrow 0 = v_0 - gt$$

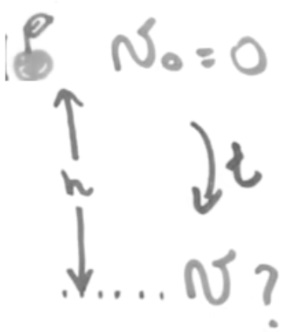
Isolando t, obtemos o tempo que a maçã leva para atingir a altura máxima:

$$t = \frac{v_0}{g}$$

Substituindo a equação acima na equação da posição, obtemos a altura máxima Δx:

$$\Delta x = \frac{v^2{}_0}{2g}$$

Agora, vamos analisar a descida:



Considerando o nosso referencial, teremos que a altura h da descida é $h = -\Delta x$. E encontramos o tempo de descida isolando na equação da posição, sendo $v_0 = 0$.

$$t = \sqrt{\frac{2h}{2}}$$

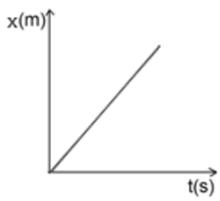
Substituindo a equação acima, na equação da velocidade v, encontramos:

$$v = \sqrt{2gh}$$

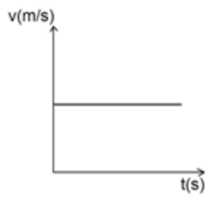
6 ANÁLISE DE GRÁFICOS

Quando temos um movimento retilíneo uniforme, a aceleração é nula e, portanto a velocidade é constante.

Os gráficos são os seguintes:



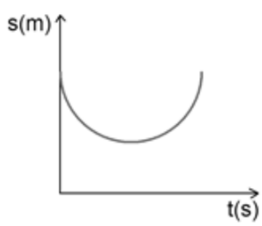
$$x(t) = x_0 + xt$$



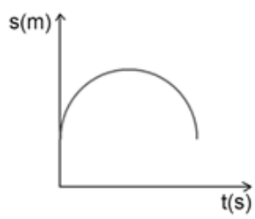
$$v = \frac{dx}{dt}$$

Quando temos uma aceleração constante, a velocidade varia com o tempo, e temos um movimento retilíneo uniforme variável.

O gráfico da posição obedece à equação $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$:

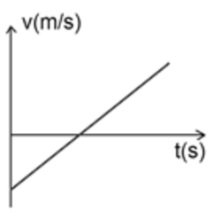


aceleração positiva

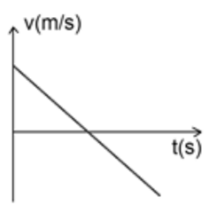


aceleração negativa

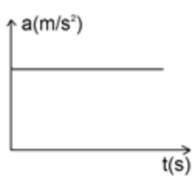
O gráfico da velocidade $v(t) = v_0 + a$



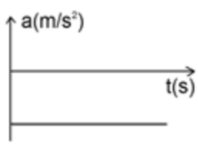
aceleração positiva



aceleração negativa



aceleração positiva



aceleração negativa

E, finalmente, o gráfico da aceleração $a = \dfrac{dv}{dt}$, a qual é constante:

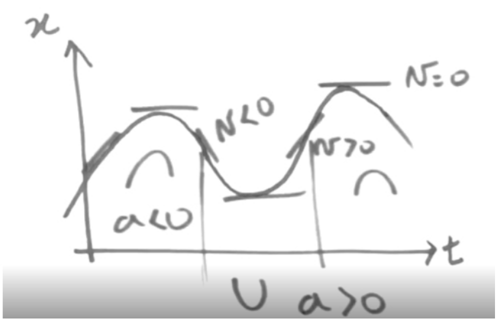
> IMPORTANTE! Quando você for resolver uma questão, pode ser que ela tenha intervalos de tempo em MRU e outros em MRUV. Então você precisa combinar os gráficos, a partir dos dados que você tem!

CÁLCULOS A PARTIR DE GRÁFICOS

Podemos interpretar os gráficos a partir das definições que temos para as variáveis v e a:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt}$$



Temos o seguinte, para a velocidade:

$$\text{Reta horizontal} \rightarrow v=0$$
$$\text{Reta crescente} \rightarrow v>0$$
$$\text{Reta decrescente} \rightarrow v<0$$

E para a aceleração, analisamos a concavidade:

$$\text{voltada para cima} \rightarrow a>0$$
$$\text{voltada para baixo} \rightarrow a<0$$

Lembrando das definições de cálculo, podemos fazer o contrário! Ou seja, podemos integrar as funções:

$$\Delta v = \int_{t_0}^{t_1} a(t)dt$$

7 MOVIMENTO 2D

Um vetor é definido por duas grandezas principais: o seu módulo $||\vec{r}||$ e a sua orientação θ em relação a algum dos eixos.

O módulo é o tamanho do vetor, ou seja, é um valor r:

$$||\vec{r}|| = r$$

A orientação de um vetor é um ângulo θ dado em relação a algum dos eixos. Nessa parte da mecânica física, utilizamos outra notação para a orientação. Definimos dois vetores unitários vetores unitários $\hat{\imath}$ na direção x e $\hat{\jmath}$ na direção y:

Podemos decompor qualquer vetor no plano xy em duas direções, r_x e r_y :

$$\vec{r} = r_x.\hat{\imath} + r_y.\hat{\jmath}$$

Assim, podemos separar o movimento horizontal do vertical. Pela trigonometria, obtemos:

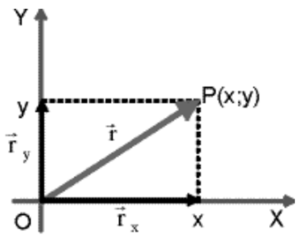
$$r_x = r.cos\theta$$

$$r_y = r.sen\theta$$

$$r^2 = r^2{}_x + r^2{}_y$$

VETOR POSIÇÃO

O vetor posição $\vec{r}$ parte sempre da origem e ele indica o lugar onde o corpo está no plano xy. Vamos dividí-lo nas duas direções, x e y:



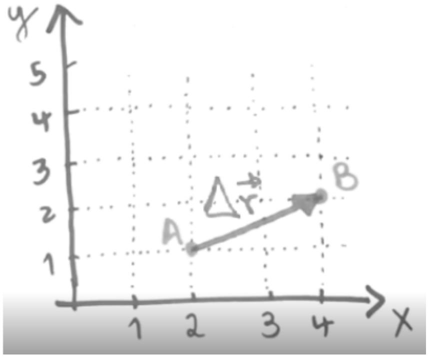
$$\vec{r}(t) = r_x.\hat{\imath} + r_y.\hat{\jmath}$$

VETOR DESLOCAMENTO

O vetor deslocamento Δr vai ser a posição final $\vec{r}_f$ menos a posição inicial $\vec{r}_i$ da partícula:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_f} - \vec{r_i}$$

Imagine uma partícula que se desloca do ponto A até o ponto B:



Observando os valores dos módulos nas direções x e y, podemos determinar os vetores posição nos pontos A e B:

$$\vec{r}_A = (2.\hat{i} + 1.\hat{j})$$
$$\vec{r}_B = 4.\hat{i} + 2.\hat{j}$$

O vetor deslocamento será:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (4.\hat{i} + 2.\hat{j}) - (2.\hat{i} + 1.j)$$

$$\vec{\Delta r} = (4 - 2).\hat{i} + (2 - 1).\hat{j} = 2.i + 1.\hat{j}$$

VETOR VELOCIDADE

O vetor velocidade pode ser a velocidade média $\vec{v}_m$ ou a instantânea $v(t)$:

O vetor $\vec{v}_m$ é a variação de uma posição Δr em um intervalo de tempo Δt:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

Como estamos falando de uma grandeza vetorial, temos os vetores unitários $\hat{i}$ na direção x e $\hat{j}$ na direção y:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta r_x}{\Delta t}.\hat{i} + \frac{\Delta r_y}{\Delta t}.\hat{j} = v_{m_x} + v_{m_y}$$

No caso da velocidade instantânea $v(t)$, temos:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\,(r_x.\hat{i} + r_y.\hat{j}) = \frac{dr_x}{dt}.i + \frac{dr_y}{dt}.\hat{j}$$

$$\vec{v}(t) = v_x.\hat{i} + v_y.\hat{j}$$

Assim, a velocidade em cada direção não influencia a velocidade na outra direção. Por exemplo, se você soltar um objeto, ele não vai começar a se mexer na horizontal, apenas na vertical, certo?

VETOR ACELERAÇÃO

O vetor aceleração média $\vec{a}_m$ é dado analogamente ao vetor velocidade média:

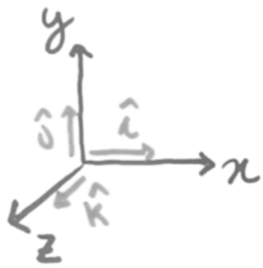
$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}.\hat{i} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}.\hat{j} = a_{m_x} + a_{m_y}$$

E o vetor aceleração instantânea $\vec{a}(t)$:

$$a(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}.\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}.\hat{j} = a_x.\hat{i} + a_y.\hat{j}$$

8 MOVIMENTO 3D

Aqui teremos um eixo z perpendicular aos outros, com um vetor unitário $\hat{k}$.



A relação entre os três eixos é:

$$\hat{i}\,.\;\hat{j} = \hat{k}$$

Basta adicionarmos as componentes do eixo z para obtermos os vetores posição $\vec{r}$, velocidade $\vec{v}$ e aceleração $\vec{a}$, serão:

$$\vec{r} = r_x.\hat{i} + r_y.\hat{j} + r_z.\hat{k}$$
$$\vec{v} = v_x.\hat{i} + v_y.\hat{j} + v_z.\hat{k}$$
$$\vec{a} = a_x.\hat{i} + a_y.\hat{j} + a_z.\hat{k}$$

E o módulo das componentes velocidade e aceleração em z:

$$v_z = \frac{\Delta r_z}{\Delta t} \rightarrow velocidade\ média$$

$$v_z = \frac{dr_z}{dt} \rightarrow velocidade\ instantânea$$

$$a_z = \frac{\Delta v_z}{\Delta t} \rightarrow aceleração\ média$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} \rightarrow aceleração\ instantânea$$

NOTAÇÃO VETORIAL

Podemos representar vetores com diferentes notações, que significam todas a mesma coisa:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix}$$

$$\vec{r} = < r_x, r_y, r_z >$$
$$\vec{r} = r_x.\hat{i} + r_y.\hat{j} + r_z.\hat{k}$$

Para os vetores unitários, também chamados de versores, podemos encontrar das seguintes formas:

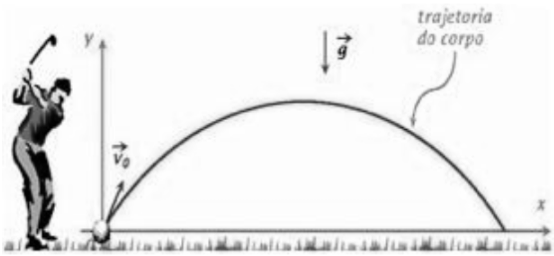
$$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \text{ ou } \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \text{ ou } \hat{u_x}, \hat{u_y}, \hat{u_z}$$

9 MOVIMENTO DE PROJÉTEIS

Vamos considerar uma partícula que se move em um plano vertical com velocidade inicial v_0 e com uma aceleração constante igual à aceleração da gravidade g, dirigida para baixo. Esta partícula é chamada de projétil e seu movimento é chamado de balístico, fazendo referência ao disparo de projéteis por uma arma de fogo.

O movimento de projéteis, também chamado de lançamento oblíquo, é, então, o movimento livre de um corpo lançado em um campo gravitacional uniforme, isto é, onde a aceleração da gravidade é constante e vertical, sendo a resistência do ar desprezível.

Uma bolinha de golf, por exemplo, pode ser um projétil, mas um avião não.



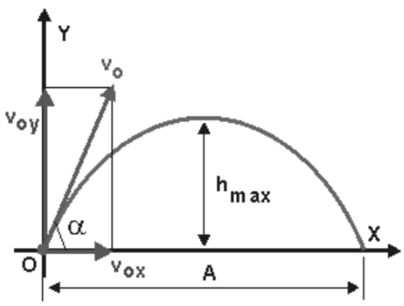
DECOMPOSIÇÃO DO MOVIMENTO

Podemos decompor o movimento de um projétil lançado em dois movimentos: um vertical e um horizontal.

O movimento horizontal é uniforme, pois não temos aceleração na componente horizontal e, portanto, a velocidade é constante.

No movimento vertical, temos a ação da aceleração da gravidade, de forma que a velocidade varia ao longo do tempo e temos um movimento uniformemente variado.

Podemos decompor a velocidade inicial v0 nas componentes x e y:



Como vimos antes, na parte de vetores, as velocidades v0x e v0y são dadas por:

$$v_{0x} = v_0 \,.\, \cos\alpha$$

$$v_{0y} = v_0 \,.\, \operatorname{sen}\alpha$$

Durante a subida, a velocidade vertical vai diminuindo até uma posição onde temos a altura máxima $h_{máx}$. Neste ponto a velocidade vertical v_{0y} será nula e então o projétil vai começar a descer, aumentando sua velocidade devido à aceleração da gravidade. A altura máxima é relativa ao movimento vertical e ela corresponde à variação de posição vertical entre os instante inicial $t = 0$ e t_{sub}.

Podemos obter o tempo de subida até a altura máxima através da equação da velocidade do MRUV:

$$v_y = v_{0y} + a.t_{sub}$$

Como o objeto está sendo desacelerado, a aceleração vertical é negativa e tem módulo igual à aceleração da gravidade ay= -g. A velocidade vy= 0 , pois estamos falando do instante onde a altura máxima, e a equação fica:

$$g = \frac{v_{0y}}{t_{sub}} \rightarrow t_{sub} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0.\,sen\alpha}{g}$$

O tempo de descida será igual ao de subida, desde que o projétil retorne à mesma posição horizontal h_0 da qual foi lançado.

Podemos determinar a altura máxima pela equação do deslocamento do MRUV, no eixo vertical:

$$v_y^2 = v^2_{0y} - 2.g.(h_{máx} - h_0)$$

Como $v_y = 0$ e $h_0 = 0$, pois o objeto está sendo lançado a partir do solo, a altura máxima será:

$$h_{máx} = \frac{v^2_{0y}}{2g} = \frac{v^2_0.\,sen^2\alpha}{g}$$

Agora, vamos falar sobre o deslocamento na direção x. O que chamamos de alcance A é a distância entre a posição x_0 de lançamento do projétil e a sua posição de volta ao mesmo nível. Essa distância é percorrida durante o tempo de realização do movimento completo, ou seja, o tempo total do movimento é $t = 2\ t_{sub}$. Portanto:

$$t = 2.\frac{v_0.\,sen\alpha}{g}$$

Podemos obter o alcance A fazendo uso das equações do MRU:

$$\Delta x = v_{0x}\,.\,t \rightarrow A = v_{0x}\,.\,2t_{sub} = v_{0x}\,.\,\frac{v^2_0.\,sen^2\alpha}{g}$$

Substituindo $v_{0x} = v_0\,.cos\alpha$ e relembrando algumas relações trigonométricas, temos:

$$A = (v_0.cos\alpha).\frac{2v_0.\,sen^2\alpha}{g} = \frac{v^2_0.\,sen2\alpha}{g}$$

Teremos o alcance máximo quando $sen2\alpha = 1$, isto é, quando o ângulo de lançamento $\alpha = 45°$.

$$A_{máx} = \frac{v^2_0}{g}$$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Nota: Temos, das relações trigonométricas: $2.sen\alpha.cos\alpha = sen2\alpha$.

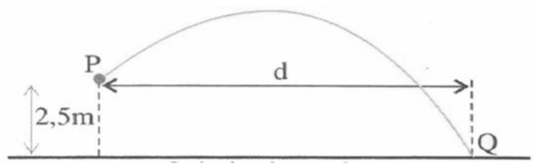
TABELA - RESUMO

Vamos juntar todas as equações em uma tabelinha para facilitar a nossa vida!

GRANDEZA	MOVIMENTO VERTICAL	MOVIMENTO HORIZONTAL
Aceleração	$a_y = -g$	$a_x = 0$
Velocidade	$v_y = v_{0y} - gt$	$v_x = v_{0x}$
Posição	$y = y0 + v_{0y} . t - \frac{gt^2}{2}$	$x = x_0 + v_{0x} . t$

Exemplo:

Uma pedra é lançada do ponto P com velocidade inicial $v_0 = 10\ m/s$, formando um ângulo de 45° com a horizontal e atingindo o ponto Q, no solo. Determine a distância d, representada abaixo. Despreze a resistência do ar.



Aqui temos um movimento bidimensional e vamos decompor nas horizontal (x) e vertical. (y). Os dados do problema são:

- A velocidade inicial: $v_0 = 10\ m/s$
- O ângulo da velocidade com a horizontal: $\theta = 45°$
- A altura de lançamento: $y_0 = 2,5\ m$
- A altura final (solo): $y = 0m$
- A aceleração da gravidade: $g = 9,8\ m/s^2$

Movimento vertical:

Do estudo do MRUV, temos:

$$y = y_0 + v_{0y} . t - \frac{gt^2}{2}$$

Sendo:

$$v_{0y} = v_0 . sen\theta$$

Queremos determinar o instante em que a pedra chega ao solo, portanto y= 0:

$$0 = y_0 + v_{0y} . t - \frac{gt^2}{2}$$

Substituindo os valores conhecidos, obtemos a equação de segundo grau:

$$0 = 2{,}5 + 10.sen(45°) - \frac{9{,}8t^2}{2}$$

$$0 = 2{,}5 + 7{,}07.t - 4{,}9.\ t^2$$

Resolvendo essa equação com Bhaskara, obtemos que a pedra chega no solo em $t = 1{,}74\ s$.

Movimento horizontal:

Agora vamos falar do MRU, sendo o deslocamento d é dado por:

$$d = v_{0x}\ .\ t$$

Lembrando que:

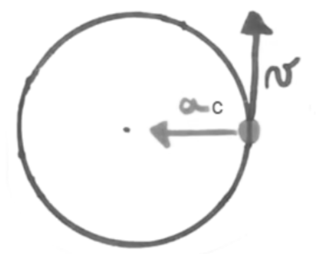
$$v_{0x} = v_0\ .\ cos\theta$$

Substituindo os valores que temos:

$$d = 10\ .\ cos(45°).\ 1{,}74 = 12{,}30\ m$$

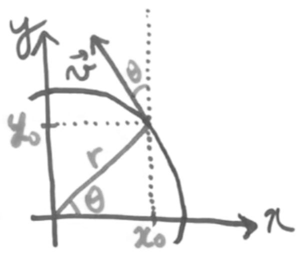
10 MOVIMENTO CIRCULAR UNIFORME (MCU)

O MCU é caracterizada por uma trajetória circular, onde a velocidade v é tangente ao movimento e tem um módulo constante, com direções diferentes. A aceleração tem módulo constante e é perpendicular à trajetória, fazendo um ângulo de 90° com a velocidade. Como a aceleração aponta sempre para o centro, chamamos de aceleração centrípeta a_c.



$$\vec{v}(t) = \vec{v_x}(t).\hat{i} + \vec{v_y}(t).\hat{j}$$

Analisando os ângulos formados no movimento e utilizando algumas relações trigonométricas, obtemos:



$$v_x = -\ v.sen\theta = -\ \frac{y_0}{r}$$

$$v_y = -\ v.cos\theta = v.\ \frac{x_0}{r}$$

Lembrando que a aceleração é a derivada da velocidade em relação ao tempo, temos:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{y}}{dt} = -\frac{y}{r} \cdot \frac{dy_0}{dt} .\hat{i} + \frac{y}{r} \cdot \frac{dx_0}{dt} .\hat{j}$$

Substituindo algumas expressões, chegamos a:

$$\vec{a}(t) = -\frac{y^2}{r} \,.\, cos\theta.\hat{i} + \frac{y^2}{r} \,.\, sen\theta \,.\, \hat{j}$$

E, para o módulo da aceleração centrípeta, podemos obter:

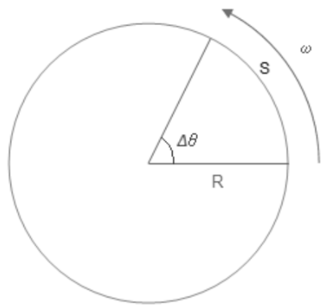
$$a_c = -\frac{y^2}{r}$$

A relação entre as componentes x e y da aceleração, é:

$$\frac{a_y}{a_x} = tg\theta$$

GRANDEZAS ANGULARES

Chamamos de período t o tempo necessário para que um objeto em MCU complete uma volta. A frequência f corresponde ao número de voltar realizado num intervalo de tempo. A rapidez com que é feito um percurso no sentido circular, é chamada de velocidade angular ω. Ainda, temos a aceleração angular α que corresponde à variação da velocidade angular no tempo.



A distância S percorrida é:

$$S = \theta.R$$

A velocidade angular média e a instantânea são dadas por:

$$\omega méd = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$$

Em relação ao período T e à frequência f:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2.\pi.f$$

A relação entre a velocidade linear v e a velocidade angular ω é:

$$v = \omega.R$$