FÍSICA

# CENTRO DE MASSA, COLISÃO E MOVIMENTO LINEAR

meSalva! | ENGENHARIA

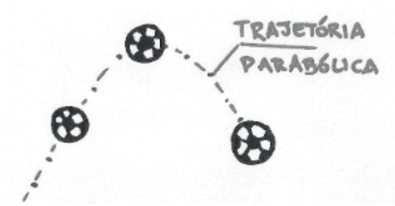
**COMECE A ESTUDAR AGORA!**

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 1 CENTRO DE MASSA

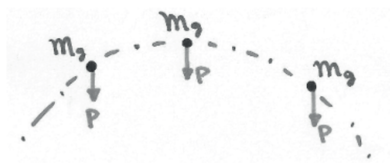
Quando estudamos partículas, tratamos de objetos bem simples, como por exemplo uma bola. No futebol, quando o goleiro chuta a bola em direção ao centro do campo, podemos enxergar isso. A bola, enquanto está no ar realiza um movimento parabólico típico de partícula. Veja:




Agora vamos ver o que acontece se você fizer o mesmo experimento com uma garrafa pet vazia. O movimento não será tão simples, pois a garrafa é composta por um conjunto de partículas que seguem diferentes trajetórias. No entanto, existe um ponto específico da garrafa que descreve uma trajetória parabólica, esse ponto se chama **Centro de Massa**. Veja a representação:


Dessa maneira, podemos descrever Centro de Massa como sendo **um ponto de um sistema de partículas que se move como se toda massa estivesse ali concentrada e todas as forças que o sistema sofre estivessem aplicadas diretamente sobre ele**.

Vamos aplicar esse conceito acima ao exemplo da garrafa. Podemos representá-la pelo centro de massa. Com isso, é possível dizer que toda massa $m_g$ da garrafa se concentra ali e que a força P que a garrafa sofre está concentrada sobre esse ponto.



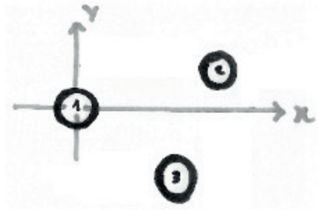

Nesse resumo, veremos como calcular o centro de massa para um sistema de algumas partículas e para corpos maciços, que podem ser enxergados como um conjunto de muitas partículas juntas.

### SISTEMA DE PARTÍCULAS

Para analisar um sistema de partículas que está contido em um plano, é preciso analisar apenas as duas direções que formam esse plano. Digamos que você está analisando uma mesa de sinuca e sobre ela existem 3 bolas. Nesse caso, as partículas estão dispostas sobre um mesmo plano, que seria a mesa. Para calcular o centro de massa desse sistema de três bolas, você deve seguir três passos.

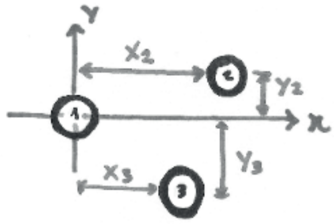
**Passo 1**

Defina um sistema de eixos, *x* e *y*. Posicione a origem sobre o centro de uma das bolas, para facilitar seu trabalho.




**Passo 2**

Registre a distância que cada bola está do eixo x e do eixo y. Perceba que como a bola 1 está sobre a origem do sistema de coordenadas, as distâncias $x_1$ e $y_1$ serão nulas.




Por fim, aplique as fórmulas abaixo, para saber qual as coordenadas do CM do sistema. Nessa fórmula, *n* é o número de partículas do sistema, ou seja o número de bolas. *M* se refere à massa de todo conjunto, ou seja, a soma das massas de todas as bolas. Cada bola possui massa $m_i$. Além disso, $x_i$ e $y_i$ são as distâncias registradas no passo anterior.

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$$

Se o sistema de partículas for tridimensional, deverá ser calculada também a coordenada z do centro de massa, através da fórmula abaixo.

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i$$

Pode-se fazer a representação do CM por meio de vetores também. Para isso, defina um sistema de coordenadas, defina o vetor posição para cada uma das partículas e aplique a fórmula abaixo.

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

$\vec{r}_{cm}$ : Vetor posição do CM

$\vec{r}_i$ : vetor posição da partícula $i$

### CORPO MACIÇO

Um corpo maciço pode ser enxergado como um conjunto enorme de partículas. Nesse caso, as partícula são os átomos do corpo maciço. Vamos dizer que a massa dessas partículas pode ser definida como um infinitesimal *dm*. Dessa forma, não podemos mais aplicar a equação para partículas, mas sim uma integral como essas abaixo.

$$X_{cm} = \frac{1}{M}\int x \cdot dm \quad Y_{cm} = \frac{1}{M}\int y \cdot dm \quad Z_{cm} = \frac{1}{M}\int z \cdot dm$$

A análise fica muito complicada se o corpo não tiver uma massa específica constante. Por exemplo, analisar o centro de massa de um ser humano seria muito difícil, pois cada região do corpo tem uma massa específica diferente. Dessa forma, analisaremos apenas corpos com massa específica constante. Se escrevermos a massa específica ρ de uma partícula como ρ=dm/dV, sendo dV o volume da partícula, podemos reescrever as fórmulas que foram apresentadas acima como:

$$X_{cm} = \frac{1}{V}\int x \cdot dV \quad Y_{cm} = \frac{1}{V}\int y \cdot dV \quad Z_{cm} = \frac{1}{V}\int z \cdot dV$$

Fique ligado nessa dica: se um corpo tiver um eixo de simetria, o CM obrigatoriamente estará situado em algum ponto desse eixo!

### 2ª LEI DE NEWTON

A análise de um sistema de partículas, ou corpo maciço se dará pela seguinte fórmula:

$$\vec{F}_{RES} = M \cdot \vec{a}_{CM}$$

Essa fórmula indica que o vetor força resultante sobre um sistema de partículas será igual à massa total desse sistema multiplicado pelo vetor aceleração do centro de massa do sistema.

## 2 MOMENTO LINEAR

### PARTÍCULA ISOLADA

O momento linear de uma partícula é definido através da equação a seguir:

$$\underbrace{\vec{p}}_{\text{VETOR MOMENTO LINEAR}} = \underbrace{m}_{\text{MASSA DA PARTÍCULA}} \cdot \underbrace{\vec{v}}_{\text{VELOCIDADE DA PARTÍCULA}}$$

Bem, sabemos que a massa m é uma grandeza escalar, assim as grandezas vetoriais de momento linear e de velocidade possuem a mesma orientação.

**COMECE A ESTUDAR AGORA!**

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

A segunda lei de Newton foi expressada através do momento linear, como vemos na equação abaixo.

$$\vec{F}_{RES} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

A partir da fórmula acima, percebemos que a taxa de variação do momento linear com o tempo é igual à força resultante do sistema. Ou seja, para que o momento linear mude, obrigatoriamente, a resultante de forças do sistema deve mudar.

### SISTEMA DE PARTÍCULAS

O momento linear de um sistema de partículas pode ser encarado como a soma vetorial dos momentos lineares de cada partícula. Assim, o momento linear para um sistema de partículas é definido como:

$$\vec{P} = M \cdot \vec{v}_{CM}$$

Para um sistema de partículas, a Segunda Lei de Newton pode ser escrita como:

$$\vec{F}_{RES} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

## 3 COLISÕES

Colisões são muito corriqueiras no nosso dia a dia. Seja ao chutar uma bola, seja ao manusear um martelo para pregar algo, as colisões são governadas pelas leis da física.

### IMPULSO

Uma grandeza física que avalia uma colisão em termos de duração e intensidade da força aplicada é o **impulso**. Ele é calculado segundo a fórmula a seguir.

$$\underset{\text{IMPULSO}}{\vec{J}} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) \cdot dt = \Delta \vec{p}$$

Percebe-se que o impulso também pode ser definido como a variação do momento linear do sistema de partículas durante o intervalo que vai de $t_i$ a $t_f$.

### CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

Suponha que a força resultante de um sistema de partículas é zero, então, o impulso também é zero. Suponha, ainda, que esse sistema é fechado, ou seja, nenhuma partícula entra ou sai dele.

Dessa forma, temos o seguinte

$$\vec{F}_{RES} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\boxed{0 = \frac{d\vec{P}}{dt}} \rightarrow \vec{P}_i = \vec{P}_f$$

Isso significa que o momento linear é conservado! Nos próximos itens, veremos como aplicar essa conservação na resolução de problemas de colisões.

### COLISÃO INELÁSTICA

As colisões inelásticas são aquelas em que a **energia cinética não é conservada**. Ou seja, após a colisão, parte da energia é perdida. Essas são as colisões mais comuns no nosso cotidiano.

Se analisarmos um sistema fechado de duas partículas A e B com força resultante nula (sistema **isolado**), podemos aplicar o princípio da conservação de momentos lineares. Então, se houver uma colisão entre A e B, podemos analisá-la conforme a seguinte equação:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$\underbrace{\vec{p}_{Ai} + \vec{p}_{Bi}}_{\text{ANTES DA COLISÃO}} = \underbrace{\vec{p}_{Af} + \vec{p}_{Bf}}_{\text{DEPOIS DA COLISÃO}}$$

Em alguns casos especiais, após a colisão, os dois corpos passam a se movimentar juntos. Esse tipo de colisão se chama Colisão Perfeitamente Inelástica. Com isso, **as velocidades finais dos corpos são iguais**, ou seja $v_{Af} = v_{Bf}$.

### COLISÃO ELÁSTICA

Nas colisões elásticas, a **energia cinética é conservada**. Além disso, se o sistema for isolado e fechado, o momento linear também é conservado. Muitas colisões podem ser ditas como **aproximadamente elásticas**. Seria o caso em que a energia cinética não é totalmente conservada após uma colisão, mas a sua perda é tão pequena que a colisão pode ser tomada como elástica.

Para uma colisão elástica entre um corpo A (projétil) e um corpo B (alvo), as velocidades finais podem ser escritas como

$$V_{Af} = \frac{m_A - m_B}{m_A + m_B} \cdot V_{Ai}$$

$$V_{Bf} = \frac{2m_A}{m_A + m_B} \cdot V_{Ai}$$

**COMECE A ESTUDAR AGORA!**

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

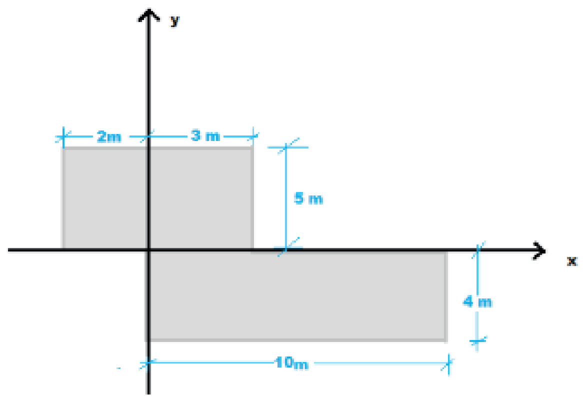
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 4 EXEMPLOS

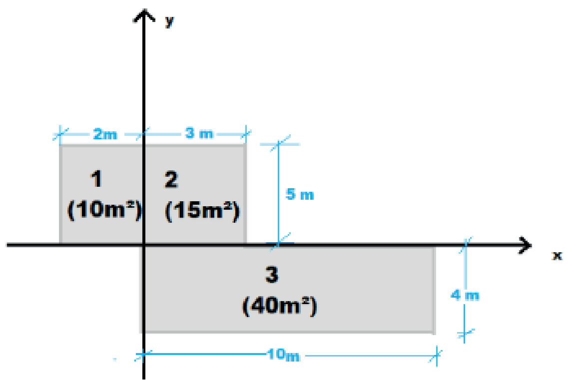
Vamos agora ver alguns exemplos sobre os conteúdos desse resumo.

### CENTRO DE MASSA

Quais são as coordenadas do CM da placa de massa homogênea abaixo? Suponha que cada m² da placa pesa 1 kg.

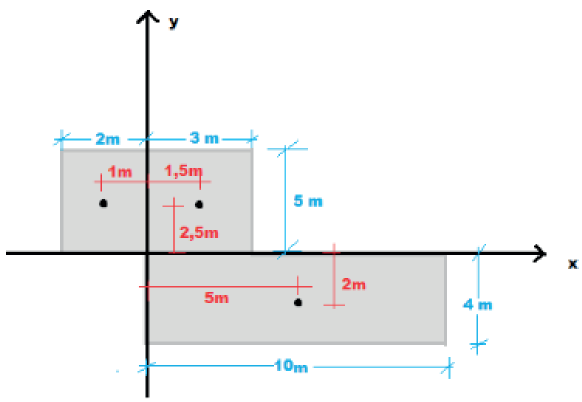



O primeiro passo seria estabelecer um eixo de coordenadas, mas o exercício já está propondo um. O melhor a se fazer quando temos figuras com formatos simples, é dividir a área. Assim, conseguimos analisar 3 retângulos:




Agora, podemos aplicar as fórmulas do centro de massa para os eixos x e y.

Antes disso, vamos ver qual a massa da placa. Como a área total da placa é 10m² + 15m² + 40m² = 65m², a placa pesa 65 kg. Registrando as distâncias $x_i$ e $y_i$ do CM de cada retângulo,temos:



**COMECE A ESTUDAR AGORA!**

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

Vamos começar por x:

$$x_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{3} m_i x_i$$

$$x_{CM} = \frac{1}{65}(10kg \cdot (-1m) + 15kg \cdot 1{,}5m + 40kg \cdot 5m) = 3{,}27m$$

Em y, temos:

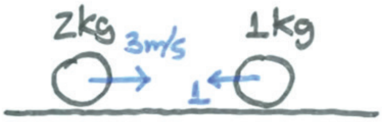
$$y_{CM} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{3} m_i y_i$$

$$y_{CM} = \frac{1}{65}(10kg \cdot 2{,}5m + 15kg \cdot 2{,}5m + 40kg \cdot (-2m)) = -0{,}27m$$

Logo, as coordenadas do CM são **(3,27; -0,27)**

**COLISÕES**

Considere as duas bolas da figura abaixo.




A da esquerda tem 2kg de massa e se move para a esquerda com v = 3m/s. A bola da direita tem 1kg de massa e se move para a direita com v=1m/s. Supondo que haverá uma colisão perfeitamente inelástica, qual a velocidade do conjunto após elas se baterem?

Bem, quando falamos de **colisões perfeitamente inelásticas**, sabemos duas coisas. A primeira é que os corpos, após a colisão, se grudam e passam a se mover com mesma velocidade. A segunda coisa é que o momento linear é conservado:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = (m_1 + m_2)\, v_f$$

Perceba que, após a colisão, podemos analisar uma única velocidade, pois as bolas estarão se movendo juntas.

Substituindo os dados conhecidos, temos:

$$2 \cdot 3 + 1\,(-1) = (2 + 1)\, v_f$$

$$v_f = 1{,}67 m/s$$

Note que chegamos em um valor positivo de velocidade. Isso significa que o conjunto de bolas passa a se movimentar para a direita. Veja que faz sentido, afinal a bola que estava se movimentando para direita não só tinha maior velocidade como era mais pesada.