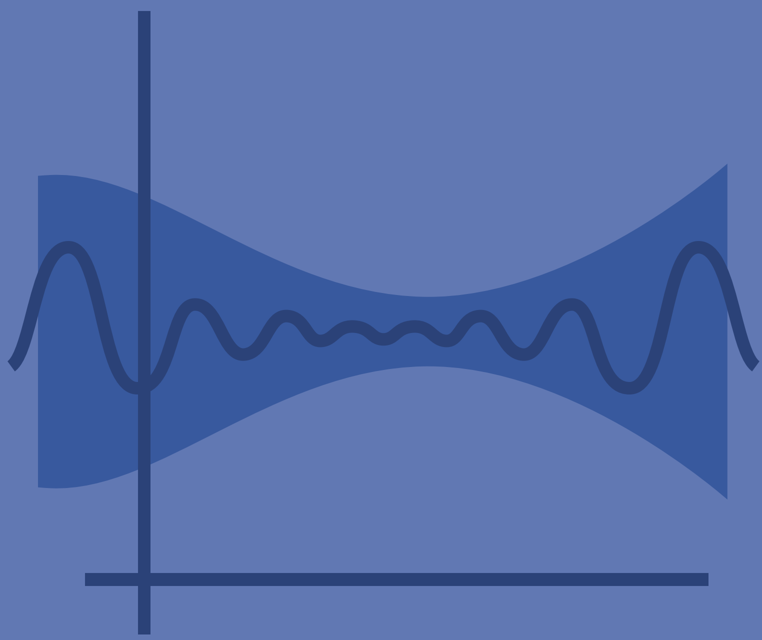


CÁLCULO

TESTE DE CONVERGÊNCIA

meSalva! | ENGENHARIA

1 TESTES DE CONVERGÊNCIA

Existem diversos testes de convergência e que são cobrados em provas, mas não fique preocupado, pois fizemos esse resumão pra te ajudar a lembrar de todos!

Lembre-se que esses testes são aplicados sempre para séries com termos positivos, com exceção do último teste que veremos!

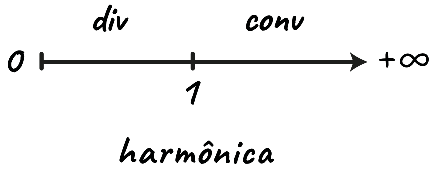
2 P-SÉRIES

São séries do tipo:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots$$

onde p é um valor fixo e a convergência ou divergência dessa série depende exclusivamente do valor de p!

Quando p está entre 0 e 1, a série diverge. Quando p é maior do que 1, os termos da série ficam cada vez menores e, portanto, a série converge. No caso de $p=1$ temos o caso da série harmônica! Se você não lembra o porquê de a série harmônica divergir, dá uma olhada no nosso resumo anterior! Memoriza o desenho abaixo que vai dar tudo certo!



Exemplo:

Na série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ temos $p = 2 \rightarrow p > 1 \rightarrow$ converge

Na série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[7]{k}}$ temos $p = 1/7 \rightarrow p < 1 \rightarrow$ diverge

É simples assim!

3 TESTE DA DIVERGÊNCIA

Esse teste nos diz que se o limite do termo geral for diferente de 0, então nosso somatório vai divergir:

$$\text{se } \lim_{k \to +\infty} u_k \neq 0 \text{ então } \sum u_k \text{ diverge!}$$

Bom, mas então quando $u_k = 0$ a série converge! Não necessariamente!

$$\text{se } \lim_{k \to +\infty} u_k \neq 0 \text{ então o teste é inconclusivo!}$$

Porém, para uma série convergir, é obrigatório termos $u_k = 0$, mas apenas isso não é suficiente para afirmar que a série converge!

Exemplo:

Determine se as seguintes séries divergem:

$$\sum \frac{1}{k} \text{ e } \sum \frac{1}{k^2}$$

Vamos aplicar o teste da divergência nas duas séries:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k^2}$$

Note que os testes resultam em 0, ou seja, o teste é inconclusivo! Porém, você deve já está cansado de saber que a nossa primeira série é a série harmônica e, portanto, ela diverge! A outra série é uma p-série e, como vimos antes, ela converge pois $p > 1$!

Então fique ligado, pois se $u_k = 0$ a série pode convergir ou divergir!

4 TESTE DA INTEGRAL

Esse teste pode nos ajudar a obter resultados bem precisos, mas é fundamental que você domine as integrais impróprias! Usamos o teste da integral apenas para séries com termos positivos.

Basicamente, trocamos k por x e montamos uma integral com os limites de integração iguais ao do somatório.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k \to \int_1^{+\infty} f(x)\, dx$$

Esse é um teste de consenso... ou seja: se a integral converge, a série com certeza converge! E vale o mesmo quando a integral diverge, o que acontece nos casos nos quais temos como resultado $\pm\infty$.

Exemplo:

Que tal analisarmos a série harmônica?

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} \to \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$$

Aqui temos uma integral imprópria, então precisamos trocar $+\infty$ por uma variável m e fazemos o limite:

$$\lim_{m \to +\infty} \int_1^m \frac{1}{k} dx = \lim_{m \to +\infty} [\ln |x|]_{x=1}^{m}$$

$$= \lim_{m \to +\infty} [\ln |x| - \ln |1|] = +\infty$$

Pensando no gráfico de $\ln x$, sabemos que quando m tender $+\infty$, x também vai tender a $+\infty$. Portanto, a série harmônica diverge!

5 COMPARAÇÃO SIMPLES

Para fazermos esse teste, precisamos de duas séries, uma maior e uma menor, sendo que cada um dos termos de uma série é sempre maior que os termos da outra série.

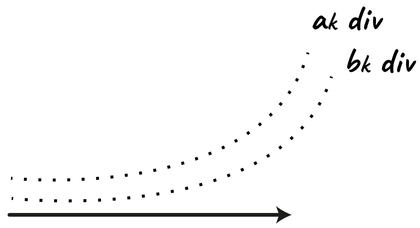
$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ e } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

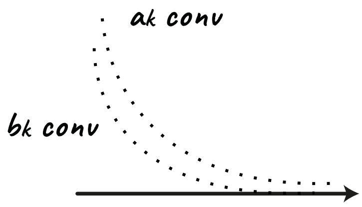
sendo $a1 \geq b1,\ a2 \geq b2, \ldots$

E dizemos o seguinte:

se $\sum b_k$ diverge, então $\sum a_k$ também diverge!

se $\sum a_k$ converge, então $\sum b_k$ também converge!





O teste da comparação simples pode ser um pouco chatinho, então deixe para usá-lo em último caso!

6 COMPARAÇÃO DE LIMITES

Vamos considerar novamente duas séries

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ e } \sum_{k=1}^{+\infty} b_k$$

Sendo que conhecemos o comportamento de uma delas $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, isto é, se ela converge ou diverge. O teste consiste em calcular e interpretar o limite:

$$\varrho = \lim_{k \to +\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Sendo que tanto faz se a ordem da divisão (a_k/b_k ou b_k/a_k), pois aqui temos novamente um teste de consenso:

se $\varrho > 1$: ambas convergem ou ambas divergem

se $\varrho = 0$ ou $\varrho = \infty$: o teste é inconclusivo

se $\varrho = 1$: é inconclusivo

Exemplo:

Vamos comparar a série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k^2 + k)}$ com a p-série $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$

Sabemos que como $p > 1$, a nossa p-série é convergente. Agora vamos aplicar o teste da comparação de limites:

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(3k^2+k)}}{\frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{(3k^2+k)}$$

Se você lembra bem de limites, sabe que quando temos limites no infinito com polinômios de mesmo grau, basta pegarmos os coeficientes dos termos de maior grau e fazer a divisão:

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \frac{1.k^2}{(3k^2+k)} = \frac{1}{3}$$

Portanto, temos $\varrho>0$e a nossa série pode convergir ou divergir.

Como sabemos que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ converge, então $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(3k^2+k)}$ também converge!

Nota: Geralmente é mais fácil compararmos com uma p-série convergente, pois você já deve ter percebido que é mais fácil identificar quando uma série converge do que quando ela diverge, né?

7 TESTE DA RAZÃO

Usamos esse teste quando u_k envolver fatoriais ou k-ésimas potências. Temos que substituir todos os k por $k+1$ da nossa série e calcular o limite:

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \frac{u_{k+1}}{u_k}$$

Bom, mas o que significa essa razão? O que estamos fazendo é a análise do comportamento dos termos da série quando $k+\to+\infty$.

Se $\varrho=1$, significa que os termos u_{k+1} e u_k estão andando praticamente juntos, na mesma velocidade para $+\infty$, então a série deve ter um comportamento homogêneo, que se repete sempre, e aí fica complicado afirmar se a série converge ou diverge!

Pensando em $\varrho<1$, fica um pouco óbvio que a série converge, pois significa que os termos estão cada vez menores! E para $\varrho>1$ ou $\varrho=\infty$, é o contrário, os termos estão crescendo muito e a nossa série vai divergir!

Resumindo:

se $\varrho<1$: a série converge

se $\varrho>1$ ou $\varrho=\infty$: a série diverge

se $\varrho=1$: é inconclusivo

8 SÉRIE ALTERNADA

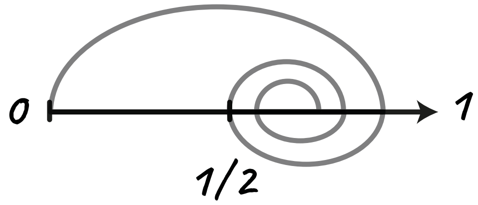
Séries alternadas têm termos com sinais alternados:

$$1 - ½ - ⅓ - ¼ + ...$$

Ou seja, elas apresentam o seguinte formato genérico:

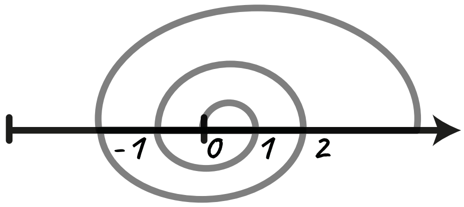
$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k . a_k$$

Pensando sobre o somatório, se montarmos um eixo e fizemos a soma dos primeiros termos da série $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$, obtemos um "caracol":



E, intuitivamente, essa série converge, concorda?

Agora, se fizermos o somatório da série $1-2+3-4+5-...$, nosso "caracol" muda um pouquinho:



Note que a série fica cada vez maior e então ela diverge!

TESTE DA SÉRIE ALTERNADA

As condições para que a série alternada seja convergente, são:

1. Os termos da série devem ser decrescentes (em módulo):

$$a_k > a_{k+1} \rightarrow a_1 > a_2 > a_3 > ...$$

2. O limite do termo geral deve tender a 0:

$$\lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

Exemplo:

Vamos analisar a série:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}.k$$

Abrindo um pouquinho os termos, temos:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}.k = 1-2+3-4+...$$

Agora, vamos analisar se os termos da série são decrescentes:

$1,2,3,4 \rightarrow$ os termos estão crescendo!

Portanto, a série diverge!

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

9 SOMAS APROXIMADAS E CÁLCULO DO ERRO

Esse método é utilizado quando queremos fazer a soma aproximada de uma série alternada. Como vamos fazer uma soma finita, é legal também podermos estimar qual o erro!

Os passos são os seguintes:

1. Primeiro temos que determinar se a série é convergente, senão não faz sentido a gente ficar aqui somando! Para isso, utilizamos o teste da série alternada, que nos diz que a série deve atender às seguintes condições para convergir:

$$a_k > a_{k+1} \ \ e \ \lim_{k \to +\infty} a_k = 0$$

2. Se a nossa série convergente, podemos fazer uma soma aproximada e também devemos estimar o erro. Sendo S uma série alternada genérica:

$$Sn = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k . a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_n$$

Pensando sobre o erro, é um pouco intuitivo que ele vai ser a diferença entre os termos que já somamos e os que não somamos, certo? Então o erro da soma parcial é dado por:

$$|S - S_n| = erro$$

E ele deve ser sempre menor do que o primeiro termo a_{n+1} que ainda não somamos:

$$\varepsilon = |S - S_n| < a_{n+1} \rightarrow |\ \varepsilon_n| < |a_{n+1}|$$

Exemplo:

Quantos termos da série abaixo devemos somar para que o erro seja menor que 0,01?

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1} . k$$

Vamos começar abrindo a série, para verificar se ela é convergente:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \dots$$ → os termos estão decrescendo!

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{1}{k!} = 0$$ → portanto, a série é convergente!

Agora, queremos somar uma quantidade n de termos para que <0,01. Vamos olhar nossos termos:

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = -\frac{1}{2!} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{1}{4!} = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120}$$

Nota que $a_5 < \frac{1}{100}$, portanto a soma será:

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24}$$

E o erro é dado por:

$$|\varepsilon|<|a_5| \rightarrow \varepsilon<120$$

10 CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Você sabe o que fazer quando temos uma série muito maluca, do tipo:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}+\ldots$$

Bom, aqui vamos precisar lembrar da seguinte propriedade algébrica: a adição ou a subtração de termos finitos de uma série infinita não altera o comportamento da série.

Considerando a série $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = u_1 + u_2 + \ldots$, o teorema nos diz que:

Se fizermos o módulo de cada um dos termos da série e se essa "nova" série $\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k|$ convergir, então $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k$ também converge.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k| = |u_1| + |u_2| + \ldots$$

Exemplo:

Vamos analisar a série que vimos antes:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}+\ldots$$

Precisamos fazer o módulo dos termos, o que resulta em:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\ldots$$

Percebeu que a gente conhece essa série? É uma série geométrica! Precisamos determinar a razão:

$$r=\frac{½}{1}=½$$

E montar a nossa série geométrica:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (½)^k$$

Como a nossa razão é $r=½<1$, nossa série geométrica converge e a série $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}-\frac{1}{2^6}+\ldots$ converge absolutamente.

11 TESTE DA RAZÃO PARA CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

Esse teste é muito parecido com o teste da razão, porém agora a série não precisa ter necessariamente apenas termos positivos, pois vamos analisar o módulo. Ou seja, podemos "ignorar" o sinal negativo! Por esse motivo, chamamos de convergência absoluta!

Basta calcularmos o limite:

$$\varrho = \lim_{k\rightarrow+\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right|$$

Depois analisamos o resultado:

se $\varrho<1$: a série converge absolutamente

se $\varrho>1$ ou $\varrho=\infty$: a série diverge

se $\varrho=1$: é inconclusivo

IMPORTANTE! Não esqueça de tirar do limite a parcela que não depende de k!

Exemplo:

Analise se a série abaixo converge:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$$

Como vamos calcular o limite para o módulo, podemos "ignorar "$(-1)^k$e temos:

$$u_k = \frac{2^k}{k!}$$

$$u_k = \frac{2^{k+1}}{(k+1)!}$$

Vamos usar um pouquinho de álgebra e montar nosso ϱ:

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k} \right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{2^k.2^1}{(k+1).k!} \cdot \frac{k!}{2^k} \right|$$

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{2}{(k+1)} = 0 \right.$$

Como $\varrho=0 \rightarrow \varrho<1$, a série converge absolutamente!