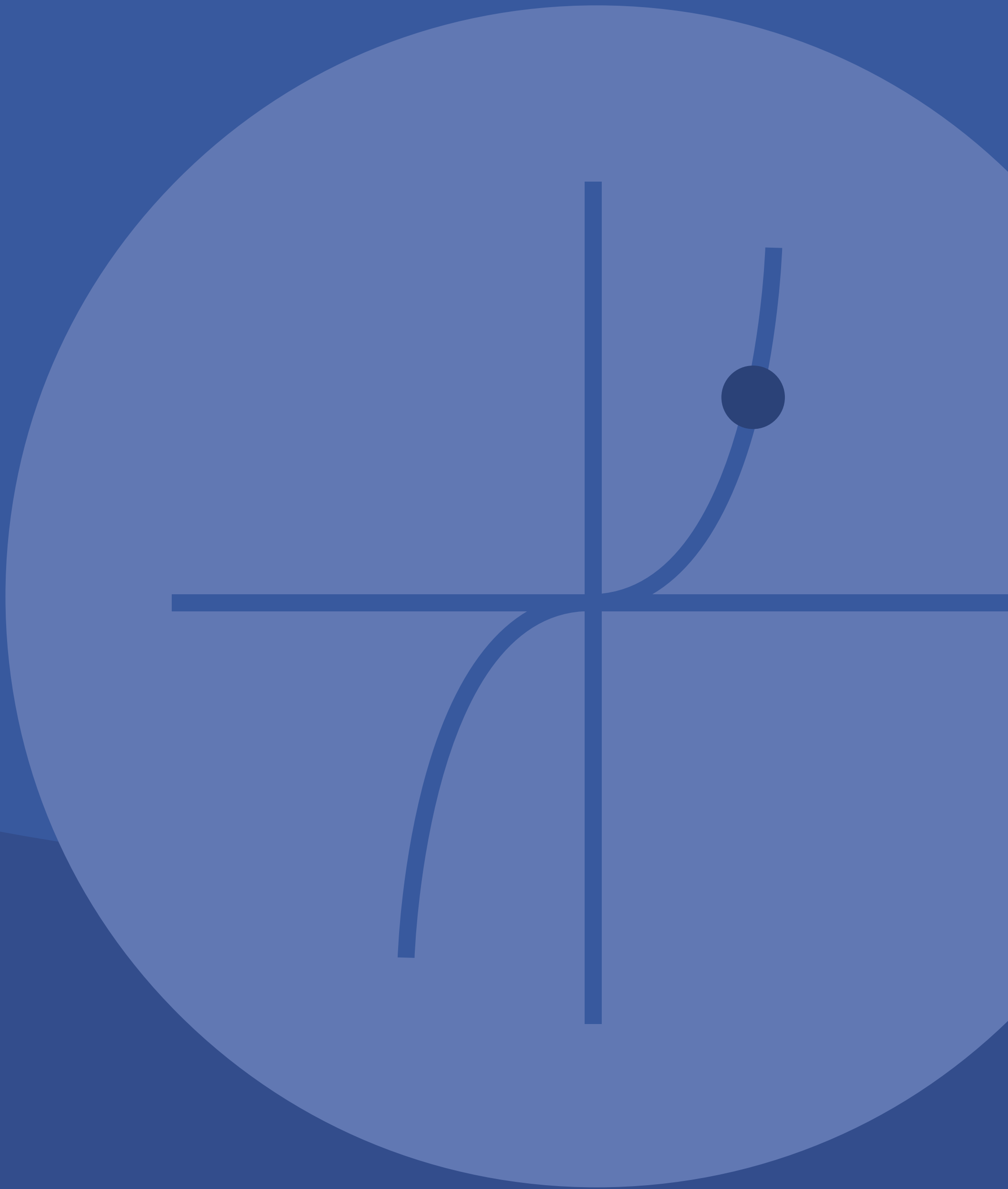


CÁLCULO

DERIVADAS

meSalva! | ENGENHARIA

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

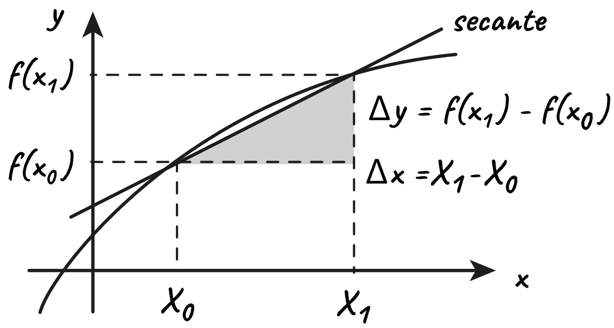
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

1 DEFINIÇÃO DE DERIVADAS

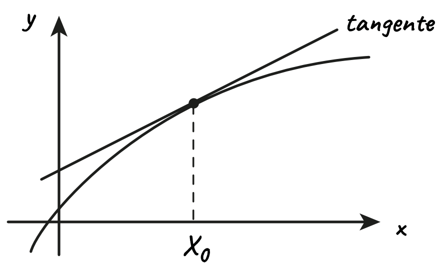
Graficamente, podemos definir a derivada de um ponto como a inclinação da reta tangente $y= f(x)$ ou a taxa de variação instantânea de y em relação a x.

Suponha que temos uma função $f(x)$ e queremos saber a taxa de variação da nossa função em um ponto inicial $x0$, associado a $y0= f(x0)$, em relação a um ponto mais para frente, $x1$, com $y1= f(x1)$.

Vamos ligar os dois pontos por uma reta que cruza a função, chamada de reta secante. Podemos determinar a variação entre esses dois pontos medindo a variação $\Delta y=f(x1) - f(x0)$ e a variação $\Delta x=x1-x0= h$, sendo a taxa de variação o coeficiente angular da reta a, calculado através de $a=\Delta y/\Delta x$.



Se quisermos uma taxa instantânea de variação, precisamos aproximar ao máximo os pontos $x0$ e x_1, como se x_1 caminhasse em direção a x_0, com uma variação mínima de Δy e Δx. Ou seja, queremos uma distância desprezível entre x_0 e x_1, fazendo h tender a zero. Assim, obtemos uma uma reta tangente ao ponto x_0 e, utilizando limites, definimos:



$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

2 DIFERENCIABILIDADE

Para que a função $f(x)$ seja diferenciável, isto é, derivável, em x_0 deverá existir o limite:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

LEMBRETE! Não esqueça que os limites laterais também devem existir e devem ser iguais!

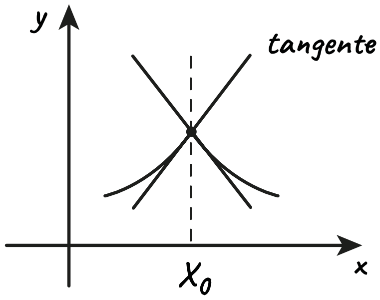
Podemos ter casos em que a função $f(x)$ é contínua em x_0, porém não é derivável em x_0. Os dois casos mais comuns que temos são apresentados abaixo.

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

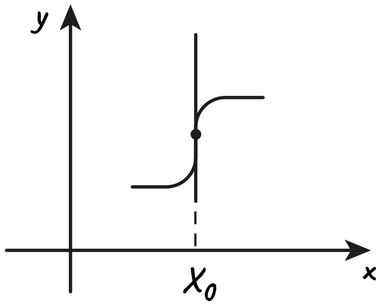
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

PONTO DE BICO:



$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

PONTO DE TANGÊNCIA VERTICAL:



$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

3 TÉCNICAS DE DERIVAÇÃO

Para o nosso estudo ficar mais fácil, temos uma tabela resumo com as derivadas mais importantes!

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$	$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \ tg\, x$
$\frac{d}{dx}(C) = 0$	$\frac{d}{dx}(cotg\, x) = -\, cossec^2\, x$
$\frac{d}{dx}(a^x) = (\ln a)a^x$	$\frac{d}{dx}(cossec\, x) = -\, cotg\, x\ cossec\, x$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\frac{d}{dx}\ arc\ sen\ x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$	$\frac{d}{dx}\ arc\ cos\ x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$	$\frac{d}{dx}\ arc\ tg\ x = \frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}(sen\, x) = \cos x$	$\frac{d}{dx}\ arc\ cotg\ x = -\frac{1}{1+x^2}$
$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\, sen\, x$	$\frac{d}{dx}\ arc\ sec\ x = \frac{1}{\lvert x \rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(tg\, x) = \sec^2 x$	$\frac{d}{dx}\ arc\ cossec\ x = -\frac{1}{\lvert x \rvert\sqrt{x^2-1}}$

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

4 REGRAS DE DERIVAÇÃO

Podemos fazer o cálculo de derivadas pela definição de derivada (vimos lá em cima), ou usando regrinhas que facilitam muito mais a nossa vida! Então vamos lá dar uma olhada nas propriedades e regras básicas de derivação!

SOMAS E SUBTRAÇÕES

$$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$$

REGRA DO PRODUTO

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

REGRA DO QUOCIENTE

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

REGRA DA CADEIA

Usamos essa regra quando queremos derivar uma função composta por duas funções.

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Exemplo:

Derive a seguinte função:

$$h(x) = sen\ (x^2 + 2)$$

Temos

$$f = sen\ x \rightarrow f' = cos\ x$$

$$g = x^2 + 2 \rightarrow g' = 2x + 0$$

Substituindo na equação:

$$h'(x)=f'(g(x)) \,.\, g'(x)=cos\ (x^2+2) \,.\, 2x$$

Outra maneira de fazermos a regra da cadeia é a seguinte:

1. Identifique quantas funções existem na composição.

2. Derive de fora para dentro.

Exemplo:

Derive a seguinte função:

$$h(x)=sen\ (x^2+2)$$

Nossa função "de fora" é sen e a "de dentro" é x^2+2.

Primeiro, vamos derivar sen e então multiplicar pela derivada de x^2+2:

$$h'(x) = cos\ (x^2 + 2).2x$$

E assim já chegamos rapidinho na resposta!

5 DERIVADA IMPLÍCITA

Usamos a derivação implícita quando não conseguimos isolar as variáveis da função.

$$\frac{d}{dx}[f(u)] = f'(u)\frac{du}{dx}$$

O que vamos fazer aqui é fixar embaixo uma das variáveis que queremos encontrar (dx) e em cima deixaremos a variável que está sendo derivada (du). Nós vamos derivar as funções em relação às variáveis e depois isolar du/dx, para obtermos a derivada.

Exemplo:

Calcule dy/dx:

$$x^2 + y^3 = \cos x + \ln y$$

Vamos calcular as derivadas dos dois lados da equação:

$$2x \cdot \frac{dx}{dx} + 3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = -sen\ x \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx}$$

Iremos deixar todas variáveis que multiplicam dy/dx de um mesmo lado da equação (lembre-se $dx/dx=1$):

$$3y^2 \cdot \frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = -\ sen\ x - 2x$$

$$\frac{dy}{dx}\left(3y^2 - \frac{1}{y}\right) = -\ sen\ x - 2x$$

Agora vamos isolar dy/dx para obtermos a resposta final:

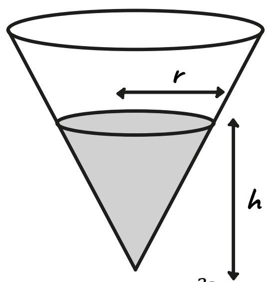
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(sen\ x + 2x).y}{3y^3 - 1}$$

6 TAXAS RELACIONADAS

Sabe quando temos muitas coisas variando e dependendo umas das outras. Parece um caos né?

Bom, chamamos de Taxas Relacionadas quando temos quantidades que estão variando em relação a outras, as quais nós conhecemos as taxas de variação. E, geralmente, temos duas ou mais grandezas variáveis relacionadas entre si por uma equação.

Um exemplo clássico é o escoamento de um reservatório em formato de um cone invertido, como na figura abaixo, onde o volume, a altura e o raio dependem do tempo e podem ser relacionadas pela equação do volume de um cone.



$$V = \frac{\pi r^2 h}{3}$$

Podemos resolver problemas com taxas relacionadas seguindo os seguintes passos:

1. Identifique cada quantidade que varia com o tempo e outras que possam ser relevantes para a resolução do problema.

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

2. Indique as taxas de variação que são conhecidas e a taxa de variação que deve ser encontrada. Analise cada taxa como uma derivada.

3. Encontre uma relação entre essas variáveis e equacione-as. Geralmente usamos geometria para isso.

4. Derive, através da derivação implícita, ambos os lados da equação em relação ao tempo. Assim obtemos uma relação entre as taxas conhecidas e a taxa desconhecida.

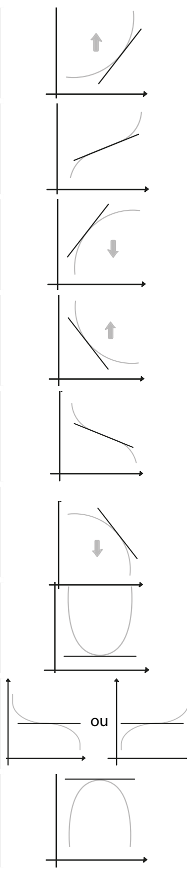
5. Substitua os valores conhecidos das taxas e das variáveis e resolva a equação encontrada para a taxa de variação desconhecida.

7 DERIVADA PRIMEIRA E SEGUNDA

Vamos usar um esqueminha para a interpretação gráfica das derivadas primeira e segunda!

	+	-	0	∄
$f(x)$	Acima do eixo x	Abaixo do eixo x	Sobre o eixo x Raízes	Fora do domínio
$f''(x)$	Crescente	Decrescente	Ponto crítico Máximos/mínimos	Não diferenciável Bico/Ponto de tangência vertical
$f''(x)$	Concavidade positiva	Concavidade negativa	Suspeito de ser um ponto de inflexão	Suspeito de ser um ponto de inflexão

DERIVADA PRIMEIRA	DERIVADA SEGUNDA	FUNÇÃO		GRÁFICO
$f'(x) > 0$	$f''(x) > 0$	crescente	concavidade ↑	
	$f''(x) = 0$		inflexão	
	$f''(x) < 0$		concavidade ↓	
$f'(x) < 0$	$f''(x) > 0$	decrescente	concavidade ↑	
	$f''(x) = 0$		inflexão	
	$f''(x) < 0$		concavidade ↓	
$f'(x) = 0$	$f''(x) > 0$	mínimo		
	$f''(x) = 0$	inflexão		
	$f''(x) < 0$	máximo		



Nota:

$f(x)$= ∄ fora do domínio

$f'(x)$= ∄ não diferenciável ou bico/ponto de tangência vertical

$f''(x)$= ∄ suspeito de ser um ponto de inflexão

Obs.: O ponto de inflexão ocorre quando a derivada segunda muda de sinal!

8 ESBOÇO DE GRÁFICOS

Acompanhe o passo a passo abaixo para fazer o esboço de gráficos utilizando conceitos de limites e derivadas.

1. Encontrar pontos de interesse de $f(x)$, se possível, como o valor da função quando $x=0$ e as raízes da função. Podem ser difíceis de encontrar, mas vamos para o passo 2!

2. Encontrar as assíntotas horizontais. Lembrando que para achar as assíntotas horizontais, temos que:

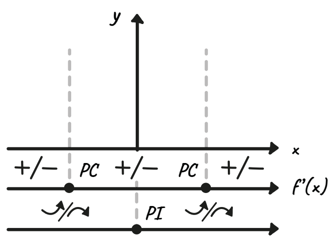
$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = K \text{ (constante)}$$

3. Procurar as assíntotas verticais. Encontramos as nossas assíntotas verticais quando nossa função não existe, como no caso de divisão por zero ou raízes de números negativos.

4. Buscar pelos máximos e mínimos. Para isso, derivamos a $f(x)$, igualamos a zero, encontramos os pontos críticos e analisamos o sinal.

5. Analisar a concavidade. Para isto, derivamos duas vezes e encontramos a derivada segunda $f''(x)$, igualando-a a zero para obtermos os suspeitos de inflexão e então analisamos o sinal.

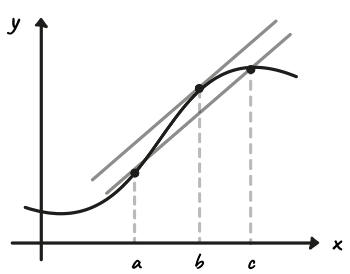
6. Traçar o esboço. Para facilitar o trabalho, desenhamos, abaixo do eixo x, duas linhas, uma para $f'(xO$ e outra para $f''(x)$, colocando, respectivamente, os pontos críticos e pontos de inflexão, juntamente com as análises de sinais. Vamos dar uma olhada no desenho abaixo!



9 TEOREMA DO VALOR MÉDIO

O teorema diz que, entre dois pontos $[a,b]$ de uma função diferenciável f, há um ponto c no qual a derivada $f'(c)$ é a inclinação da reta tangente paralela à reta secante que passa pelos ponto $[a,b]$.

$$f'(c) = \frac{f'(b) - f(a)}{b - a}$$



10 REGRA DE L'HÔPITAL

Aplicamos a regra de L'Hôpital quando o $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ resultar em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$ ou $\pm\frac{\infty}{\infty}$. A definição da regra é a seguinte:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Ela nos diz que o limite de funções racionais é igual ao limite da derivada do numerador sobre a derivada do denominador com x→a. Ou seja, temos que derivar a função do numerador $f(x)$ e a função do denominador $g(x)$ e tentar encontrar o limite. Caso ainda resulte em uma indeterminação, devemos continuar derivando.

Exemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = ?$$

Note que temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, então vamos usar a regra de L'Hôpital para resolver esse limite:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2+2x-8} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{2x+2}$$

$$\frac{2.2}{2.2+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$