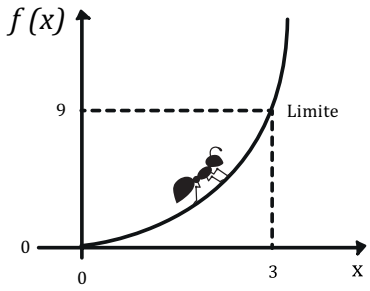
CÁLCULO

LIMITES

meSalva! | ENGENHARIA

1 DEFINIÇÃO DE LIMITES

Imagine o seguinte exemplo: uma formiga está tentando chegar no ponto em x = 3 andando pela curva definida pela função $f(x)=x^2$, então, quando chegar, y será 9!



De modo geral, se $f(x)$ é uma função qualquer, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

a equação acima pode ser lida como "o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de a é L." Isso significa que se nós escolhermos valores de x próximos, mas não iguais a a, então $f(x)$ será próximo de L. Em outras palavras, $f(x)$ se aproxima de L quando x se aproxima de a.

2 SUBSTITUIÇÃO DE NÚMEROS PARA ENCONTRAR O LIMITE

Essa é a maneira mais simples de se determinar um limite. Ela ocorre quando a função $f(a)$ existe. Nesse caso, basta substituir o valor do limite diretamente na fórmula. Exemplo:

$$\lim_{x \to 1} 2x - 4 = \lim_{x \to 1} 2 \,.\, 1 - 4 = -2$$

3 LIMITES INDETERMINADOS

As indeterminações podem surgir quando não temos como calcular um limite de maneira racional. Por exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0} \quad \text{Indeterminado!}$$

0/0 é um problema! Nós realmente não sabemos o valor de 0/0 (é "indeterminado"), então precisamos de outra maneira para encontrá-lo.

Ao invés de tentar trabalhar para x = 1 vamos tentar aproximar cada vez mais os valores:

x	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

É possível notar que quando x se aproxima de 1, então $(x^2-1) / (x-1)$ se aproxima de 2.

Estamos agora diante de uma situação interessante:

✓ Quando $x = 1$ não sabemos a resposta (é indeterminada)

✓ Mas podemos ver que o limite será 2, pois quanto mais próximo x está de 1, mais próximo de 2 é o valor da função.

4 LIMITES TENDENDO AO INFINITO

Vamos começar com um exemplo interessante: qual o valor de $1/\infty$?

Resposta: não sabemos! E por que não sabemos? A razão mais simples é que o Infinito não é um número, e sim uma ideia. Talvez pudéssemos dizer que $1/\infty = 0$, mas isso também seria um problema. Se dividirmos 1 em pedaços infinitos, eles terminam em 0 cada. Se somarmos novamente, o resultado será 0 e não 1. O que aconteceu com o 1?

Em vez de x se aproximar de algum número finito, pode-se dizer que x fica indefinidamente grande. Aí perguntamos: o que acontece com $f(x)$? Se houver um número L tal que $f(x)$ chega arbitrariamente perto de L, se alguém escolher um x suficientemente grande, então escrevemos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

Lê-se: O limite para x tendendo ao infinito é L.

Exemplo: $f(x) = 1/x$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Em vez de tentar achar o valor no infinito (porque não podemos obter uma resposta sensata), vamos tentar valores cada vez maiores de x:

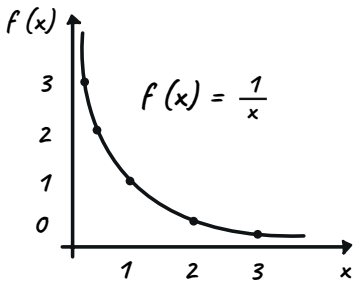
x	$\frac{1}{x}$
1	1
10	0,1
100	0,01
10000	0,0001

Agora podemos ver que quando x fica maior, $1/x$ tende para 0 (ou se aproxima de 0).

Estamos agora diante de uma situação interessante:

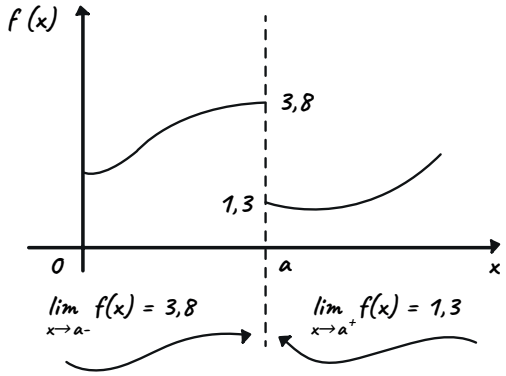
- ✓ Não podemos dizer o que acontece quando x chega ao infinito
- ✓ Mas podemos ver que $1/x$ vai para 0

O gráfico comporta-se da seguinte maneira:



5 LIMITES LATERAIS

Se tivermos uma função $f(x)$ com uma "quebra", assim:



O limite não existe em "a", porque há duas respostas concorrentes:

- ✓ 3,8 se x se aproxima pela esquerda
- ✓ 1,3 e x se aproxima pela direita.

Podemos usar os sinais especiais "-" ou "+" (conforme gráfico acima) para definir **limites unilaterais**:

- ✓ O limite à esquerda (-) é 3,8, ou seja, $\lim_{x \to a^-} f(x) = 3{,}8$
- ✓ O limite à direita (+) é de 1,3, ou seja, $\lim_{x \to a^+} f(x) = 1{,}3$
- ✓ E o limite ordinário "não existe", ou seja, $\lim_{x \to a} f(x) = \nexists$

No exemplo acima, apresentamos um explicação mais simples do conceito de continuidade, o qual pode ser definido por: "uma função $f(x)$ definida num intervalo é contínua nesse intervalo, se $f(x)$ for contínua em todos os pontos desse intervalo." Logo, a função acima é descontínua, pois não condiz com a definição.

6 PROPRIEDADES DE LIMITES

LIMITE DE UMA CONSTANTE

Se a e c são constantes, então:

$$\lim_{x \to a} c = c \qquad \lim_{x \to a} x = a$$

LIMITES DA SOMA, PRODUTO E QUOCIENTE

Seja F_1 e F_2 duas funções dadas, nas quais os limites de $x \to a$ são conhecidos,

$$\lim_{x \to a} F_1(x) = L_1 \qquad \lim_{x \to a} F_2(x) = L_2$$

Então:

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) + F_2(x)) = L_1 + L_2 \qquad \lim_{x \to a} (F_1(x) - F_2(x)) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) \,.\, F_2(x)) = L_1 . L_2 \qquad \lim_{x \to a} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

, para

$$\lim_{x \to a} F_2(x) \neq 0$$

7 LIMITES TRIGONOMÉTRICOS

Há dois limites fundamentais: o limite do seno e o limite do cosseno.

LIMITE DO SENO

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

LIMITE DO COSSENO

$$\lim_{x \to 0} \frac{cos(x)}{x} = 1$$

8 EXEMPLOS DE LIMITES

SUBSTITUIÇÃO

A primeira tentativa é apenas colocar o valor do limite e verificar se funciona (em outras palavras, substituição).

Exemplo	Funciona?
$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \to \frac{(1-1)}{(1-1)} = \frac{0}{0}$	✗
$\lim_{x \to 10} \frac{x}{2} \to \frac{10}{2} = 5$	✓

FATORIZAÇÃO

É possível tentar a decomposição dos elementos.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$x^2-1 \xrightarrow{\text{Fatorando}} (x-1)(x+1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \to 1} (x+1)$$

$$\lim_{x \to 1} (x+1) = 1 + 1 = 2$$

CONJUGADOS

Quando for uma fração, multiplicar a parte superior e inferior por um conjugado também pode ajudar.

Então,

$$\lim_{x \to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} \quad \lim_{x \to 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{4 - x} \cdot \frac{2 + \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to 4} \frac{1}{2 + \sqrt{2}} = \frac{1}{2 + \sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

9 REGRA DE L'HÓPITAL

É uma regra para limites tendendo ao infinito a fim de sair da indeterminação. Para ter um bom entendimento, observe o exemplo a seguir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x}$$

Há uma indeterminação no limite acima. Então, separamos a função em duas novas funções, sendo:

$$f(x)=x \qquad g(x)=e^x$$

Logo, para calcular o limite, tira-se a derivada de $f(x)$ e $g(x)$, ficando:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$