PROPORÇÃO

A primeira ideia que vem à cabeça quando pensamos em proporção é a ideia da regra de três. Realmente é uma ideia que ocupa grande parte do tratamento de situações em que temos proporção, mas existem diferentes nuances que valem a pena um olhar mais detalhado. Vamos a elas!

NÚMEROS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

São, basicamente, números que expressam grandezas que crescem juntas "numa mesma proporção". Se você tem, por exemplo, algo expresso em tabela como a que é mostrada abaixo, você pode notar quase que *intuitivamente* que quanto mais tempo você ficar no banho, mais água vai gastar.

tempo no banho (min)	água gasta (litros)
5	50
10	100
15	150
20	200

Mais que isso! Você pode perceber que, dividindo o valor de uma linha da segunda coluna pelo valor de uma mesma linha da primeira coluna, você chegará sempre ao mesmo valor – *uma constante* – que, nesse caso, representa o gasto de água por minuto e é chamada *razão de proporcionalidade*.

$$\frac{50}{5} = \frac{100}{10} = \frac{150}{15} = \frac{200}{20} = 10$$

Podemos generalizar e dizer que quando temos uma grandeza com valores *diretamente proporcionais* a outra grandeza e quando dividimos uma grandeza por outra, obtemos sempre a mesma constante.

NÚMEROS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

É *exatamente* a mesma ideia dos números diretamente proporcionais, mas aqui, quando uma grandeza cresce, a outra decresce. Pode ser difícil pensar rápido em algo assim, mas há infinitos exemplos. O mais clássico é a relação entre tempo e velocidade para encontrar um deslocamento. Quanto mais rápido eu ando, menos tempo eu preciso pra cobrir uma mesma distância:

velocidade (m/s)	**tempo (s)**
2	80
4	40
6	26,67
8	20
10	16

Então, se eu dividir o valor de uma linha da primeira coluna pelo valor da mesma linha da segunda coluna, vai me dar… ops! Agora não temos uma constante! Então os valores são ainda *proporcionais*? Sim, são! Mas como um decresce *na mesma proporção* do crescimento do outro, são grandezas *inversamente proporcionais*. Mas como podemos ver isso?

Quando grandezas são *inversamente proporcionais*, a forma mais simples de verificar isso é que *o produto dos valores de cada linha é constante*! Por exemplo:

$$2 \times 80 = 160$$
$$4 \times 40 = 160$$
$$6 \times 26{,}66\ldots = 160$$
$$8 \times 20 = 160$$
$$\vdots$$

DIVISÃO EM PARTES DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Essa é uma das partes sobre proporcionalidade que mais aparecem em provas! Vamos a um exemplo rápido que é a melhor maneira de ver como as coisas funcionam.

Digamos que eu tenha uma herança de R$ 2.000.000,00 a ser dividida entre 2 irmãos, um de 45 anos e o outro de 35 anos, e o critério de divisão do valor é que ele deve ser dividido de forma *diretamente proporcional* às idades de cada um deles. Ou seja, se é diretamente proporcional, quem tem mais idade ganha mais.

Podemos pensar que teremos *um certo valor para cada ano de idade* de cada um deles. Logo, se dividirmos o valor da herança pela idade total dos dois juntos, teremos um valor por idade. Ou seja, teremos uma *razão de proporcionalidade*:

$$Razão\ de\ Proporcionalidade\ (RP) = \frac{valor}{soma} = \frac{2.000.000}{45+35} = \frac{2.000.000}{45+35} = 25.000\ reais/(ano\ de\ idade)$$

Logo, para cada ano de idade de cada um dos irmãos, temos um valor de herança de R$ 25.000,00. Se multiplicarmos a idade de cada um deles pela razão de proporcionalidade, obteremos o valor devido de herança a cada um:

$$Valor\ Correspondente\ (35) = (35\ anos\ de\ idade) \times (25.000\ reais/(ano\ de\ idade)) = 875.000\ reais$$

$$Valor\ Correspondente\ (45) = (45\ anos\ de\ idade) \times (25.000\ reais/(ano\ de\ idade)) = 1.125.000\ reais$$

De maneira mais formal e geral, podemos dizer que, quando queremos dividir um valor **V** em partes diretamente proporcionais a **a** e **b**, podemos que dizer que

$RP = \frac{valor}{soma} = \frac{V}{a+b}$ → **Razão de Proporcionalidade**

$VC(a) = a \times RP$ → **Valor Correspondente à parte 'a'**

$VC(b) = b \times RP$ → **Valor Correspondente à parte 'b'**

Essa mesma forma de divisão proporcional pode ser feita para mais que duas partes. Tente você mesmo. ;)

DIVISÃO EM PARTES INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Cai muito menos que a divisão diretamente proporcional, mas para não faltar, lá vai.

Suponha que um pai quer dar de presente de Natal um valor para cada um de seus 3 filhos: Augusto, de 15 anos, César, de 20 anos e Luís, de 25 anos. Porém, dispõe de apenas R$ 1.175,00 reais para dividir e por isso decide – justificando que quanto mais velho o filho, mais presentes ganhou até hoje – dividir o valor maneira *inversamente proporcional* às suas idades. Justo, né? Logo, o que tem mais idade ganha menos e o mais novo, mais.

Mas qual valor é dado para cada um em particular? Eis um exemplo clássico de divisão em partes inversamente proporcionais!

De novo, vamos explicar fazendo:

Temos um valor de $R\$\ 1.175,00$ a ser dividido entre irmãos de 15, 20 e 25 anos. Na verdade, como estamos dividindo de forma inversamente proporcional às idades, podemos pensar como se estivéssemos ***dividindo de forma <u>diretamente proporcional ao inverso</u> <u>de suas idades</u>***. Parece muito difícil, mas fazendo fica mais fácil entender.

Faça o seguinte:

1º) Defina o valor a ser dividido e os valores da grandeza que serve como critério de divisão. Nesse caso, o valor total para presente e as idades dos irmãos:

VALOR = R$ 1.175,00
IDADES: (15, 20, 25)

2º) Faça o *m.m.c.* dos valores da grandeza que serve como critério da divisão:

IDADES: (15, 20, 25)

m.m.c das idades $\longrightarrow$ 300

$$
\begin{array}{ccc|l}
15 - & 20 - & 25 & 2 \\
15 - & 10 - & 25 & 2 \\
15 - & 5 - & 25 & 3 \\
5 - & 5 - & 25 & 5 \\
1 - & 1 - & 5 & 5 \\
\hline
1 - & 1 - & 1 & = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \\
 & & & = 300
\end{array}
$$

2º) Multiplique o inverso dos valores da grandeza que serve como critério da divisão pelo *m.m.c.* encontrado e use estes novos valores (agora são números inteiros, mais fáceis de lidar) como critério da divisão, uma divisão *diretamente proporcional*, como explicado anteriormente:

$$\left(\frac{1}{15}, \frac{1}{20}, \frac{1}{25}\right) \times \underset{\uparrow\ \text{mmc das idades}}{300} = (20, 15, 12)$$

Logo, para a divisão diretamente proporcional, o Augusto, César e Luís não estão mais representados pelas suas idades, mas por 20, 15 e 12, respectivamente

$$Razão\ de\ Proporcionalidade\ (RP) = \frac{valor}{soma} = \frac{1.175{,}00}{20+15+12} = \frac{1.175{,}00}{47} = 25$$

$$Augusto = VC(20) = 20 \times 25 = R\$\ 500,00$$

$$César = VC(15) = 15 \times 25 = R\$\ 375,00$$

$$Luís = VC(12) = 12 \times 25 = R\$\ 300,00$$

Desse jeito, reduzimos um problema de divisão *inversamente proporcional* a uma divisão mais simples, na forma de uma divisão *diretamente proporcional*, que segue os mesmos passos mostrados na parte de divisão diretamente proporcional. Nota duas coisas: a gente aqui já dividiu em mais que duas partes e, neste exercício o que tem menos idade recebeu mais e o que tem mais idade recebeu menos, como era de se esperar de grandezas e números inversamente proporcionais.

REGRA DE TRÊS SIMPLES

Basicamente o que difere a regra de três simples da regra de três composta é que a regra de três simples se limita a problemas em que apenas duas grandezas estejam envolvidas.

Há regra de três simples envolvendo tanto grandezas *diretamente* quanto *inversamente* proporcionais, e esse é o ponto que precisamos ter mais atenção quando resolvemos regra de três simples.

Aqui vamos ver apenas uma forma de resolução que pode ser útil porque é **sistemática** e **organizada**, de forma que qualquer problema pode ser abordado da mesma forma:

REGRA DE TRÊS COM GRANDEZAS DIRETAMENTE PROPORCIONAIS

Imagine, por exemplo, que você está indo de São Paulo ao Rio de Janeiro a pé e consegue caminhar 15 km por dia. Sabendo que a distância entre São Paulo e Rio de Janeiro é de 450 km, em quantos dias de caminhada você chegará no Rio de Janeiro?

1º) **Faça uma pequena tabelinha e insira os dados** (com as grandezas identificadas é melhor) **e atribua uma incógnita ao dado que falta** (o clássico x da questão):

caminhada (km)	**tempo (dias)**
15	1
450	**x**

2º) **Verifique se as grandezas são diretamente proporcionais**. Se um aumenta, tem de ser óbvio pra você que o outro também tem de aumentar. Caso tenha essa dúvida, pense melhor nos dados questão, eles devem indicar a tendência.

3º) Caso sejam diretamente proporcionais, **multiplique cruzado e encontre o 'x'**.

caminhada (km)	tempo (dias)
15	1
450	x

$$15 \times x = 450 \times 1 \;\Rightarrow x = \frac{450}{15} = 30$$

Ou seja, com esse ritmo de caminhada você chegará no Rio em trinta dais. Boa viagem. ;)

mesalvaoficial mesalva mesalva mesalva mesalva.com

REGRA DE TRÊS COM GRANDEZAS INVERSAMENTE PROPORCIONAIS

Então.. é a mesma coisa (hehe). Sim, é a mesma coisa. A única coisa que muda é que, se no 3º passo mostrado você percebe que as grandezas envolvidas são *inversamente proporcionais*, ou seja, quando uma aumenta a outra diminui, você *inverterá as linhas da coluna da tabela que não contém o 'x'*, antes de multiplicar cruzado.

Por exemplo: suponha que uma equipe de 12 pedreiros leva 60 dias para construir uma casa. Se o número de pedreiros da equipe for reduzido para 9, quantos dias a equipe reduzida levará para construir a mesma casa, considerando que todos os pedreiros trabalham sempre no mesmo ritmo.

Ora, vamos aos mesmos passos:

1º) **Faça uma pequena tabelinha e insira os dados e atribua uma incógnita ao dado que falta**:

nº de pedreiros	**tempo (dias)**
12	60
9	**x**

2º) **Verifique se as grandezas são <u>inversamente</u> proporcionais**. Se um aumenta, pode-se perceber intuitivamente que o outro tem de diminuir;

3º) Caso sejam inversamente proporcionais, **<u>inverta os valores das linhas da coluna que não contém o 'x'</u> e multiplique cruzado para encontrá-lo**:

nº de pedreiros	tempo (dias)
12	60
9	x

nº de pedreiros	tempo (dias)
9	60
12	x

$$9 \times x = 60 \times 12 \Rightarrow x = \frac{60\times12}{9} = \frac{20\times12}{3} = 20 \times 4 = 80\ dias$$

Ou seja, com 9 pedreiros demoraria mais (80 dias no total) do que com 12 pedreiros (60 dias no total)

REGRA DE TRÊS COMPOSTA

É praticamente a mesma ideia, só que com mais de duas grandezas envolvidas.

Por exemplo: imagine que a mesma equipe de 12 pedreiros, trabalhando 8 horas por dia, terminem uma casa em 60 dias. Se a equipe é reduzida para 9 pedreiros que trabalham apenas 6 horas por dia, quantos dias serão necessários para terminar a mesma casa?

Como você pode notar, são 3 agora as grandezas envolvidas. Quais sejam: nº de pedreiros, tempo (dias) e horas/dia.

Vamos aos nossos passos:

1º) **Faça uma pequena tabelinha** (agora com as três grandezas) **e insira os dados e atribua uma incógnita ao dado que falta**:

nº de pedreiros	**tempo (dias)**	**horas/dia**
12	60	8
9	**x**	6

2º) **Fixe a coluna da grandeza que contém o 'x' e analise as outras colunas das outras grandezas quanto a como se comportam com relação à grandeza que contém o 'x'**.

nº de pedreiros	**tempo (dias)**	**horas/dia**
12	60	8
9	**x**	6

- Quanto menos pedreiros, mais dias levará para construção (grandezas inversamente proporcionais);
- Quanto menos horas de trabalho por dia, mais dias levará para a construção (grandezas inversamente proporcionais).

3º) **Inverta as linhas da(s) grandeza(s) inversamente proporcional(is) àquela do ‘x’, se estão presentes**:

nº de pedreiros	tempo (dias)	horas/dia
12	60	8
9	x	6

nº de pedreiros	tempo (dias)	horas/dia
9	60	**6**
12	**x**	**8**

4º) **Iguale a razão entre os valores das linhas da coluna que contém o ‘x’ ao produto das razões das linhas das outras colunas, já com a configuração invertida para as inversamente proporcionais** (seria o mesmo procedimento se mais de três grandezas estivessem envolvidas).

$$\frac{60}{x} = \frac{9}{12} \times \frac{6}{8} \Rightarrow \frac{60}{x} = \frac{9\times6}{12\times8} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{60}{x} = \frac{9}{16} \Rightarrow 9 \times x = 60 \times 16 \Rightarrow x = \frac{60\times16}{9}$$

$$x \approx 106,67\ dias$$

Note a coerência da resposta, pois com menos operários trabalhando menos horas por dia, <u>obviamente</u> a resposta deve resultar maior que 60 dias.