CÁLCULO

# SÉRIES DE POTÊNCIA

meSalva! | ENGENHARIA

**COMECE A ESTUDAR AGORA!**

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 1 SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma série de potências depende de uma variável real $x$ e apresenta constantes $C_k$, chamadas de coeficientes. Ela se apresenta da seguinte forma:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k$$

Quando desenvolvemos a série, $x$ permanece $x$, pois é uma variável! O que devemos alterar são os valores de $k$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} C_k x^k = C_0 x^0 + C_1 x^1 + C_2 x^2 + \dots$$

Ou seja, podemos interpretar uma série de potência como sendo um "polinômio infinito", pois não temos um limite para a potência $x$.

Exemplo:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$$

## 2 RAIO E INTERVALO DE CONVERGÊNCIA

Você já está cansado de saber que quando falamos em séries, estamos interessados no comportamento final delas, ou seja: se elas vão convergir ou divergir.

O que muda agora é que a convergência ou divergência da série vai depender do valor de $x$! O intervalo no qual a série converge é chamado de intervalo de convergência e ele é determinado pelo raio de convergência.

Para verificar se uma série de potências converge ou diverge, podemos seguir os seguintes passos:

**1.** Encontrar o centro da série, isto é, o valor de $x$ que zera a função:

$$f(x) = 0$$

**2**. Fazer o Teste da Razão para Convergência Absoluta

$$\varrho = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|$$

**3.** Calcular o raio de convergência, ou seja, fazer $\varrho < 1$.

**4.** Substituir os extremos do intervalo na série e analisar se a série converge ou diverge nas pontas.

**5.** Determinar o intervalo de convergência final.

LEMBRETE! O Teste da Razão para Convergência Absoluta (TRCA) envolve o cálculo do limite:

$$\varrho = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right|$$

Sendo que:

se $\varrho < 1$: converge absolutamente

$\varrho > 1$ ou $\varrho = \infty$: diverge

$\varrho = 1$: inconclusivo

Basicamente, temos que substituir todos os $k$ por $k+1$ e calcular o limite. Não esqueça de tirar do limite a parcela que não depende de $k$! Se ainda estiver na dúvida, dá um olhada no nosso resumo sobre Testes de Convergência!

Exemplo:

Determine se a série abaixo converge ou diverge:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (x-3)^k$$

**1.** Vamos começar determinando o centro:

$$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$$

Agora sabemos que a série é centrada em $x=3$.

**2.** Fazendo o TRCA:

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{u_{k+1}}{u_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{(x-3)^{k+1}}{(x-3)^k}\right|$$

Usando algumas regrinhas de potência, vamos obter:

$$\varrho = \lim_{k\to+\infty} (x-3)^1 = |x-3| \lim_{k\to+\infty} 1 = |x-3|$$

**3.** Vamos calcular o raio de convergência para $\varrho < 1$:

$$\varrho = |x-3| < 1$$

$$-1 < x - 3 < 1$$

$$2 < x < 4$$

Portanto, nosso intervalo de convergência é (2,4).

**4.** Precisamos substituir os extremos na série:

$$x = 2 \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (2-3)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k = (-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots$$

$$x = 4 \rightarrow \sum_{k=0}^{+\infty} (4-3)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} 1^k = 1^0 + 1^1 + 1^2 + \dots$$

Quando $x = 2$, é fácil ver que a série oscila entre $-1$ e $1$ e que o somatório não tende a um mesmo valor, né?! E para $x = 4$, a série diverge pois nosso somatório não para de crescer nunca!

**5.** Finalmente, nosso intervalo de convergência é aberto nas extremidades:

$$IC = (2,4)$$

**COMECE A ESTUDAR AGORA!**

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!

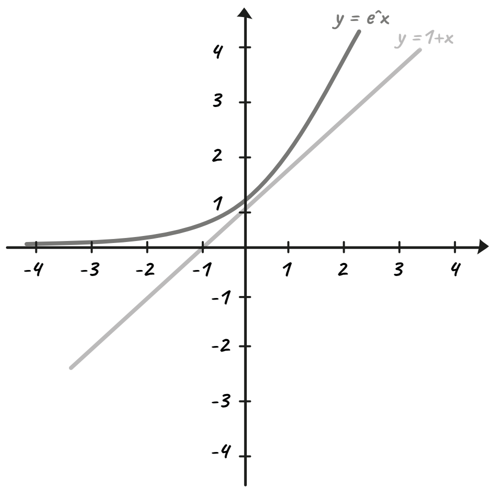
Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

## 3 SÉRIES DE MACLAURIN

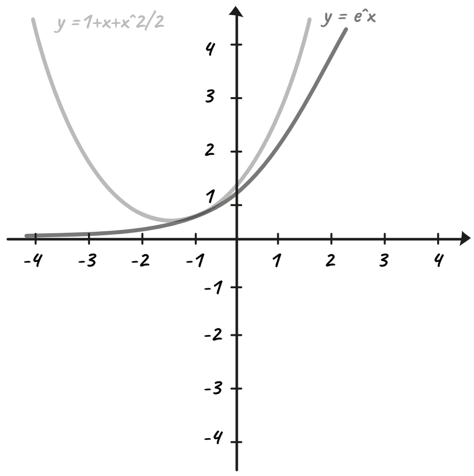
O objetivo de Maclaurin era de representar uma função $f(x)$ através de uma série, utilizando um polinômio $p(x)$ de $n$ graus, verificando a interferência de $n$ na convergência da série. Parece meio confuso, né? Que tal tentarmos entender melhor através de gráficos?

Considere que queremos aproximar, próximo da origem, um polinômio $p(x)$ da função $f(x)=e^x$.

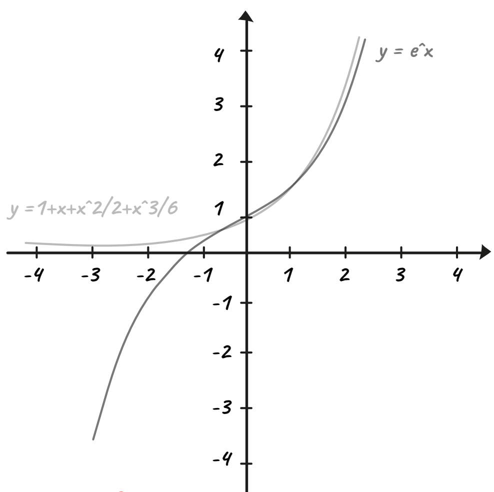
Polinômio de 1° grau: $p(x)= 1 + x$




Polinômio de 2° grau: $p(x)= 1 + x + x2/2$




Polinômio de 3° grau: $p(x)= 1 + x + x^2/2 +x^3/6$



Você conseguiu notar que a curva do polinômio de 3° grau se aproximou muito mais de $f(x)= e^x$ do que as de menor grau? E reparou que a cada grau $n$ que aumentamos, adicionamos um termo ao polinômio? Se você consegue visualizar isso, podemos continuar com a nossa revisão!

**CARACTERÍSTICAS E FORMATO**

Nessa série, os polinômios são calculados sempre próximos à origem $(x=0)$. Além disso, as $n$ primeiras derivadas da função $f(x)$ que queremos aproximar devem ser iguais as $n$ primeiras derivadas do polinômio $p_n(x)$ usado na aproximação. Portanto:

$$f'(0) = P'(0)$$

$$f''(0) = P''(0)$$

$$f''(0) = Pn(0)$$

Esses polinômios têm a seguinte cara:

$$P(x) = f(0) + f'(0)\frac{x^1}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

A notação de somatório para as séries de Maclaurin fica assim:

$$f(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}$$

Quanto maior o grau de $n$, melhor é a aproximação, pois teremos mais termos no polinômio e melhor vai ser a convergência. Assim, se fizermos $n$, a nossa série muda um pouquinho:

$$f(x) \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

sendo os coeficientes $a_n$ dados por

$$C_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

Exemplo:

Encontre a série de Maclaurin para:

$$f(x) = e^x$$

Vamos começar encontrando os coeficientes $C_n$:

$$f^{(k)}(0) = e^0 = 1$$

$$C_k = \frac{1}{k!}$$

Portanto, a série de Maclaurin fica:

$$e^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

## 4 SÉRIES DE TAYLOR

São uma generalização da série de Maclaurin, pois calculamos a aproximação em um ponto qualquer $x_0$.

**CARACTERÍSTICAS E FORMATO**

Da mesma forma que nas séries de Maclaurin, temos que as $n$ primeiras derivadas da função $f(x)$ que queremos aproximar devem ser iguais as $n$ primeiras derivadas do polinômio $p_n(x)$ usado na aproximação. Portanto:

$$f'(x_0) = P'(x_0)$$
$$f''(x_0) = P''(x_0)$$
$$f''(x_0)=P^n(x_0)$$

Os polinômios que estamos aproximando são da forma:

$$p(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\frac{(x\text{-}x_0)^1}{1!} + f''(x_0)\,\frac{(x\text{-}x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\,\frac{(x\text{-}x_0)^n}{n!}$$

Então, a série de Taylor fica com o seguinte formato:

$$f(x)\ \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(X_0)}{k!}\ (x - x_0)^k$$

Da mesma forma que nas séries de Maclaurin, aumentando o grau de $n$, melhor será a aproximação, pois teremos mais termos no polinômio e aumentaremos a convergência do nosso resultado. Fazendo $n$ e nossa série fica:

$$f(x)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(X_0)}{k!}\ (x - x_0)^n$$

sendo os coeficientes dados por:

$$C_k = \frac{f^{(k)}(X_0)}{k!}$$

Exemplo:

Encontre a série de Taylor centrada em $x_0 = 2$ para:

$$f(x) = ex$$

Os passos são os mesmo que utilizamos para encontrar a série de Maclaurin, a diferença é que agora nosso centro não está mais em $0$:

$$f^{(k)} = e^x$$

$$C_k = \frac{e^2}{k!}$$

Portanto, a série de Taylor fica:

$$e^x\ \sum_{k=0}^{n} \frac{e^2}{k!}\ (x - 2)^k$$