CÁLCULO

INTEGRAIS TRIPLAS

meSalva! | ENGENHARIA

1 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DE INTEGRAIS TRIPLAS

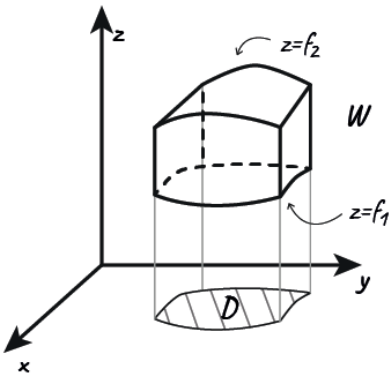
Nas integrais triplas, temos funções f(x,y,z) integradas em um volume dV= dx dy dz, sendo a região de integração um paralelepípedo P= [a,b] x [c,d] x [e,f].

$$\iiint_P f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \quad \textbf{ou} \quad \int_e^f \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dV$$

2 REGIÕES

TIPO I

Limitadas em z por superfícies e no plano xy por uma área D, que é a projeção da região W.



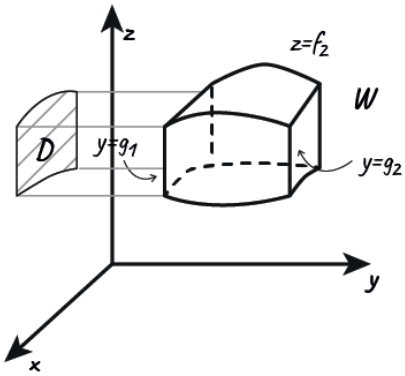
$$f_1(x,y) \leq z \leq f2(x,y)$$

$$(x,y) \in D$$

$$\iint_D \left[\int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

TIPO II

Limitadas em y por superfícies e no plano xz por uma área D.



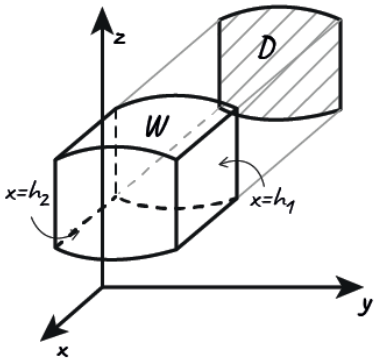
$$g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z)$$

$$(x,y) \in D$$

$$\iint_D \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA$$

TIPO III

Limitadas em x por superfícies e no plano yz por uma área D.



$$h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)$$

$$(y,z) \in D$$

$$\iint_D \left[\int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)dx \right] dA$$

PASSO A PASSO PARA RESOLVER INTEGRAIS TRIPLAS

1. Fazer um esboço da região.

2. Ver qual o tipo de região (I, II ou III) e escrever uma das variáveis entre duas superfícies, chamando a projeção no plano de D.

3. Escrever a integral tripla como uma integral simples em uma variável e uma integral dupla no plano das variáveis D.

4. Resolver a integral simples.

5. Determinar D e achar os intervalos da integral dupla.

6. Resolver a integral dupla.

Exemplo:

Calcule $\iiint_R (x^2+2yz)\, dx\, dy\, dz$, onde a região R é formada pelos pontos (x, y, z) tais que:

$$0 \leq x \leq 1 \; ; \; 0 \leq y \leq 2x \; ; \; 0 \leq z \leq x+y$$

Note que estamos falando de uma região do tipo I, pois z está limitado por uma função f(x,y). Portanto, devemos montar nossa integral da seguinte forma:

$$\int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{x+y} (x^2+ 2yz)\, dz\, dy\, dx$$

Vamos começar resolvendo a integral mais interna:

$$\int_0^{x+y} (x^2+ 2yz)\, dz = [zx^2+yz^2]_0^{x+y}$$

$$= (x^3+x^2y)+y(x^2+2xy+y^2) = x^3+2x^2y+2xy^2+y^3$$

Agora, vamos substituir o resultado acima e calcular a integral do meio:

$$\int_0^{2x} = (x^3+2x^2y+2xy^2+y^3)\, dy = [x^3y+x^2y^2+\frac{2xy^3}{3}+\frac{y^4}{4}]_0^{2x}$$

$$= 2x^4+4x^4+\frac{16x^4}{3}+4x^4 = 10x^4+\frac{16x^4}{3}$$

Finalmente, vamos para a última integral:

$$\int_0^1 \left(10x^4+\frac{16x^4}{3}\right) dx = \left[\frac{10x^5}{5}+\frac{16x^5}{3.5}\right]_0^1$$

$$= 2 + \frac{16}{15} = \frac{46}{15}$$

Portanto:

$$\int_0^1\int_0^{2x}\int_0^{x+y}(x^2+ 2yz)\, dz\, dy\, dx = \frac{46}{15}$$

Nota: Nessa parte da matéria, vamos passar mais rapidinho os desenvolvimentos algébricos e que envolvem propriedades das integrais, então se ficar com alguma dúvida, olha com bastante calma o exemplo e dá uma espiada nos outros resumos!

3 VOLUME DE UMA REGIÃO

O volume de uma região W é dado por:

$$V = \iiint_W dx\, dy\, dz$$

4 MASSA DE UM SÓLIDO

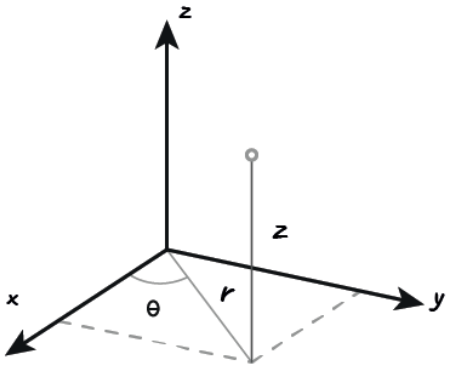
Sendo δ a densidade do sólido, a massa de W é dada por:

$$M = \iiint_W \delta(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

5 COORDENADAS CILÍNDRICAS

Usamos esse tipo de coordenada quando nossa região envolve cilindros, cones e parabolóides. De uma maneira geral, isto ocorre quando há simetria em relação ao eixo z e a projeção fica mais bem adaptada a coordenadas polares.

Para escrever fazer a mudança de variáveis, escrevemos sua projeção no plano xy em coordenadas polares e sua coordenada z continua a mesma.



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$

$$z = z$$

$$dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

Obs.: se z for uma função de x e y, como z = x + y, a mudança cilíndrica resulta em z = r (cos θ + sen θ).

6 COORDENADAS ESFÉRICAS

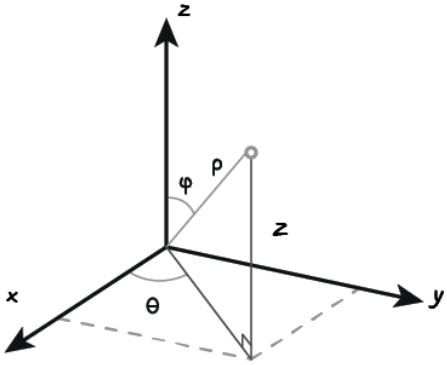
Usamos coordenadas esféricas quando a região de integração envolve esferas, cones e elipsóides. De uma maneira geral, isso ocorre quando temos simetria em relação à origem.

Precisamos de três informações para escrever um ponto em coordenadas esféricas:

1. A distância até a origem (ρ).

2. O ângulo θ que a projeção de ρ no plano xy faz com o eixo x.

3. O ângulo φ que ρ faz com a parte positiva do eixo z.



$$x = \rho \text{ sen } \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \text{ sen } \varphi \text{ sen } \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

$$dV = \rho^2 \text{sen } \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

Exemplo: Calcule o volume de uma esfera de raio r.

Considerando a esfera E de raio r e centro na origem, temos:

$$V = \iiint_E dx\, dy\, dz = \iiint_E dV$$

Para usar coordenadas esféricas, devemos considerar o seguinte conjunto

$$E_{\theta\rho\varphi} = \{(\theta, \rho, \varphi) \in R^3 \,;\, 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \rho \le r,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$$

Assim, temos

$$V = \iiint_E \rho^2 \text{ sen } \varphi \, d\rho \, d\theta \, d\varphi$$

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r} \rho^2 \text{ sen } \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

Vamos resolver primeiro a integral de dentro:

$$\int_0^r \rho^2 \text{ sen } \varphi \, d\rho = \text{sen } \varphi \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r = \text{sen } \varphi \left[\frac{r^3}{3} - \frac{0^3}{3}\right] = \frac{r^3}{3} \text{sen } \varphi$$

Então:

$$V = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{r^3}{3} \text{ sen } \varphi \, d\varphi \, d\theta = \frac{r^3}{3} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \text{ sen } \varphi \, d\varphi \, d\theta$$

Resolvendo a próxima integral

$$\int_0^{\pi} sen\ \varphi\ d\varphi\ d\theta = [-\cos\varphi]_0^{\pi} = [-\cos\pi + \cos 0\ ] = [1+1] = 2$$

Agora temos:

$$V = \frac{r^3}{3}\int_0^{2\pi} 2d\theta = \frac{r^3}{3}[2\theta]_0^{2\pi} = \frac{r^3}{3}\ [2.2\pi - 2.0]$$

E, finalmente, determinamos a equação do volume da esfera

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

7 RESUMO DAS PRINCIPAIS SUPERFÍCIES

Superfície	Equação
Cones	$z^2 = ax^2 + by^2$
CIlindro	$ax^2 + by^2 = 1$ (cilindro elíptico) $z^2 = ax^2 + by^2$ (cilindro parábola)
Paraboloides elípticos	$z = ax^2 + by^2$
Hiperboloides de uma folha	$ax^2 + by^2 - cz^2 = 1$

Obs.: esfera com centro deslocado $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$