



FÍSICA

ROTAÇÃO, MOMENTO DE INÉRCIA E TORQUE

meSalva!



ENGENHARIA



COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

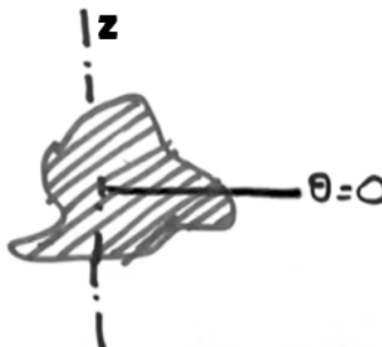
1 ROTAÇÃO

Quando se fala em rotação, passamos a analisar corpos que giram em torno de um eixo. A roda de um carro em movimento, por exemplo, faz uma rotação em torno do eixo que passa pelo centro dela.

No estudo da rotação, algumas variáveis novas aparecem. Elas serão vistas nos próximos itens.

POSIÇÃO ANGULAR (θ)

Pense em um corpo de formato qualquer que pode girar em relação de um eixo z , conforme figura abaixo. O eixo z em torno do qual o corpo rotaciona é chamado eixo de rotação. Na figura, observamos também uma linha contínua, que está fixa ao corpo. Vamos dizer que esta linha está numa posição inicial $\theta = 0$, de forma que toda rotação que o corpo fizer poderá ser representado pelo ângulo θ que representa o quanto girou a linha de referência.



Assim, pode-se calcular a posição angular, usando a seguinte equação:

$$\theta = \frac{s}{r}$$

Onde s é o comprimento do arco de circunferência de raio r cujo ângulo é θ . Se essa fórmula for usada, você deve usar a unidade de radianos para o ângulo θ . Para converter graus em radianos, use a relação a seguir:

$$1 \text{ revolução} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

DESLOCAMENTO ANGULAR ($\Delta\theta$)

Um deslocamento angular nada mais é do que um corpo que vai de uma posição angular θ_1 para uma posição θ_2 . Dessa forma, o deslocamento é calculado pela variação da posição angular, segundo a seguinte fórmula:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Como convenção, diremos que deslocamentos no sentido anti-horário são positivos e no sentido horário são negativos.

VELOCIDADE ANGULAR (ω)

A velocidade angular média de um corpo pode ser medida através do intervalo de tempo Δt que o corpo leva para fazer um deslocamento angular $\Delta\theta$. Dessa forma, a fórmula da velocidade angular média é enunciada a seguir:

$$\omega_{med} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Para calcular a velocidade angular instantânea, podemos aplicar a seguinte fórmula:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

A unidade mais comum para velocidade angular é $[rad/s]$. Lembre-se que a velocidade angular

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

é um vetor e seu sentido será dado pela regra da mão direita: envolva o corpo com a mão direita, com os seus dedos no sentido da rotação, o polegar estendido mostra qual o sentido do vetor velocidade. Lembre-se que o módulo da velocidade corresponde à velocidade angular escalar.

ACELERAÇÃO ANGULAR (A)

A aceleração angular média de um corpo é calculada a partir da variação de velocidade angular $\Delta\omega$ em um intervalo de tempo Δt , conforme a fórmula abaixo:

$$\alpha_{med} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Para calcular a aceleração angular instantânea, aplicamos a seguinte fórmula:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

A unidade mais comum para aceleração angular é rad/s^2 .

EQUAÇÕES DA CINEMÁTICA COM ACELERAÇÃO ANGULAR CONSTANTE

Quando estudamos movimento retilíneo, vemos que existiam equações especiais para os casos de aceleração constante. No estudo da rotação, também existem equações especiais para quando a aceleração angular é constante. Essas equações são as seguintes.

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + \alpha t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha \cdot (\theta - \theta_0) \\ \theta - \theta_0 &= \frac{1}{2} (\omega + \omega_0) t \\ \theta - \theta_0 &= \omega_t \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2\end{aligned}$$

RELAÇÃO ENTRE VARIÁVEIS LINEARES E ANGULARES

Em exercícios de rotação de corpos rígidos, é comum precisarmos relacionar as variáveis lineares S , V e a de um ponto desse corpo com as variáveis da rotação do corpo θ , ω e α . As relações estão listadas abaixo. Nas relações a seguir, r é a distância perpendicular do ponto em análise do corpo rígido ao eixo de rotação:

1. POSIÇÃO: A relação entre posições angulares e lineares são dadas em função da distância r . Nessa relação, sempre deve ser usada a unidade rad para ângulos. A relação fica:

$$s = \theta \cdot r;$$

2. VELOCIDADE. A relação entre velocidades também depende da distância r . Lembre-se que o vetor velocidade linear sempre será tangente à circunferência. Também é necessário usar a unidade rad para ângulos. A velocidade escalar do ponto em análise será:

$$v = \omega \cdot r;$$

3. ACELERAÇÃO. O vetor aceleração do ponto em análise terá duas componentes: uma tangencial e uma radial. A componente tangencial será

$$a_t = \alpha \cdot r$$

A componente radial será:

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 \cdot r$$

Além dessas relações, ressalta-se que o período T do movimento do ponto em análise será

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega}$$

2 ENERGIA CINÉTICA E MOMENTO DE INÉRCIA

A energia cinética de um corpo em rotação é dada pela expressão

$$K = \frac{1}{2}I\omega$$

Onde I é o momento de inércia do corpo. Fisicamente falando, o momento de inércia é uma medida da dificuldade em se fazer girar algum corpo em relação a um determinado eixo. Ele é calculado da seguinte maneira:

1. Em se tratando de um conjunto de partículas, usa-se a expressão

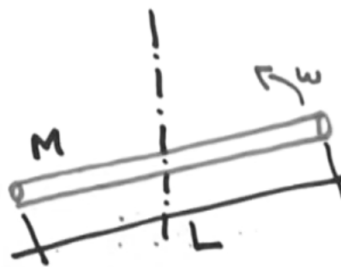
$$I = \sum m_i r_i^2$$

onde m_i é a massa da partícula i e r_i é a distância da partícula i até o eixo de rotação.

2. Em se tratando de um corpo rígido, usa-se a expressão

$$I = \int r^2 dm$$

onde dm é um elemento infinitesimal de massa e r é a distância desse elemento ao eixo de rotação. Essa integral é feita em relação a todas partículas que compõe o corpo. Suponha que se queira descobrir o momento de inércia da barra abaixo.



Essa barra possui massa M e comprimento L . O eixo sobre o qual se quer calcular o momento de inércia passa pelo centro de massa dessa barra. Assim a integral que enunciamos acima levará ao seguinte resultado $I = \frac{1}{2}ML^2$.

TEOREMA DOS EIXOS PARALELOS

Quando aplicamos a integral $I = \int r^2 dm$, nosso trabalho é sempre mais fácil se o eixo de rotação em análise passar pelo centro de massa do corpo. No entanto, caso o eixo de interesse não passe pelo centro de massa do corpo, mas seja paralelo a ele, torna-se conveniente aplicarmos o Teorema dos Eixos Paralelos. O teorema é aplicado segundo a fórmula a seguir.

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

Na fórmula acima, M é a massa do corpo em análise, I_{CM} é o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo CM do corpo e h é a distância do eixo de interesse ao eixo central.

A figura abaixo ilustra o que você precisa saber para aplicar o momento de inércia de um eixo de interesse a partir do teorema dos eixos paralelos. A figura mostra um disco, mas o teorema pode ser aplicado a qualquer geometria.

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.



3 TORQUE (τ)

Torque (ou momento) é o efeito que ocorre ao girarmos ou torcermos um corpo em relação a um eixo por meio da aplicação de uma força $\vec{F}$. Pode ser enxergado como uma medida da capacidade de uma força de produzir rotação em um corpo.

Aplicando-se em $\vec{F}$ um ponto dado pelo vetor posição $\vec{r}$, temos que o módulo do torque será:

$$\tau = rF_1 = r_1F = rF\sin\varphi$$

Na equação acima, F_1 é a componente de $\vec{F}$ que é perpendicular a $\vec{r}$ e φ é o ângulo entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{r}$. Ainda, tem-se que r é a distância perpendicular entre o eixo de rotação e a reta que coincide com $\vec{F}$. Essa reta é chamada de linha de ação, enquanto que r , em ambos os casos abordados acima, é chamado de braço de alavanca.

A unidade é $N.m$ e o sinal será positivo para uma rotação no sentido anti-horário e negativo para uma rotação no sentido horário.

4 EXEMPLOS

A seguir, veremos dois exemplos, um sobre rotação e outro sobre momento de inércia.

ROTAÇÃO

Pense em um disco que está girando em torno de seu eixo a uma velocidade angular de 100 rad/s . Esse disco começa a ser freado a uma taxa constante de 2 rad/s^2 .

1. Quanto tempo o disco leva para parar?

Se estamos interessados em saber quanto tempo demora para o disco parar, a velocidade angular final será $\omega = 0$.

Temos os seguintes dados do enunciado: $\omega_0 = 100 \text{ rad/s}$ e $\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$. Sabendo que a aceleração é constante, podemos aplicar a fórmula a seguir:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$0 = 100 + (-2)t$$

$$t = 50s$$

Repare que a aceleração angular é negativa pois ela está freando o disco.

2. Qual o deslocamento angular que acontece?

Agora, vamos ver qual o deslocamento que o giro sofre até parar. Para isso, podemos usar a fórmula abaixo:

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo e exercícios resolvidos na plataforma do Me Salva!



Acesse o conteúdo completo com a câmera do seu celular ou tablet pelo QR Code ao lado.

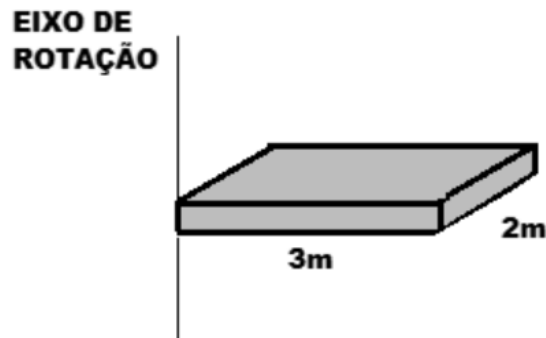
$$\begin{aligned}\theta - \theta_0 &= \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \\ \theta - \theta_0 &= 100 \cdot 50 + \frac{1}{2} \cdot (-2) \cdot 50^2 \\ \theta - \theta_0 &= 2500 \text{ rad}\end{aligned}$$

Assim, temos que o disco gira 2500 radianos até parar.

MOMENTO DE INÉRCIA

Calcule o momento de inércia da placa fina abaixo em relação ao eixo de rotação indicado. Considere que sua massa é $m=0,2\text{kg}$.

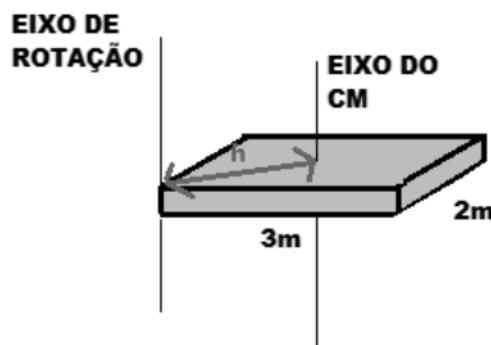
Dado: o momento de inércia para uma placa fina com um eixo de rotação passando pelo CM é $I_{CM} = 1/12M(a^2+b^2)$, sendo a e b as dimensões da placa.



Como o eixo de rotação não passa pelo CM, devemos aplicar o Teorema dos Eixos paralelos. Para isso, devemos saber o qual o momento de inércia em torno do CM. O exercício nos diz que isso vale:

$$\begin{aligned}I_{CM} &= 1/12M(a^2+b^2) \\ I_{CM} &= (1/12) \cdot 0,200 (3^2+2^2) = 0,217 \text{ kg.m}^2\end{aligned}$$

Agora, devemos descobrir qual a distância entre o eixo que passa pelo CM e o eixo de interesse. O desenho abaixo ilustra isso.



Percebemos, através do desenho, que a distância h entre os eixos é a diagonal do retângulo dividido por dois. Aplicando um simples Pitágoras, chegamos em $h = 1,80\text{m}$.

Agora, podemos calcular o momento de inércia através da fórmula do Teorema dos Eixos Paralelos:

COMECE A ESTUDAR AGORA!

Confira as aulas em vídeo
e exercícios resolvidos na
plataforma do Me Salva!



Acesse o
conteúdo
completo com
a câmera do
seu celular ou
tablet pelo QR
Code ao lado.

$$I = I_{CM} + Mh^2$$

$$I = 0,217 + 0,200 \cdot 1,80^2 = 0,865 \text{ kg.m}^2$$

Por fim, temos que o momento de inércia será $0,865 \text{ kg.m}^2$. Perceba que o momento de inércia para um eixo central ($0,217 \text{ kg.m}^2$) é bem menor que o momento de inércia calculado ($0,865 \text{ kg.m}^2$). Isso significa que é bem mais fácil fazer girar uma placa se o eixo de rotação passar pelo CM.