RESUMO DE INTEGRAIS

INTEGRAL INDEFINIDA

A arte de encontrar antiderivadas é chamada de integração. Desse modo, ao aplicar a integral dos dois lados da equação, encontramos a tal da antiderivada:

$$f(x) = \frac{d}{dx}[F(x)]$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

NOTA MENTAL: Não esquecer a constante para integrais indefinidas.

Fórmulas de Integração	
$\int dx = x + C$	$\int cossec\ x\ cotg\ x\ dx = -\ cossec\ x + C$
$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C\ (r \neq -1)$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\int cos\ x\ dx\ = sen\ x + C$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{ln\ b} + C\ (0 < b, b \neq 1)$
$\int sen\ x\ dx = -\ cos\ x + C$	$\int \frac{1}{x} dx = ln\ \lvert x \rvert\ + C$
$\int sec^2 x\ dx = tg\ x + C$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg\ x + C$
$\int cossec^2\ x\ dx = -\ cotg\ x + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arc\ sen\ x + C$
$\int sec\ x\ tg\ x\ dx\ = sec\ x + C$	$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = arcsec\ \lvert x \rvert\ + C$

Propriedades da integral indefinida!

$\int c\, f(x)dx = c \int f(x)dx$	Quando se multiplica por uma constante, ela pode estar dentro ou fora da integral, que dá na mesma!
$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$	A integral de uma soma é a soma das integrais
$\int [f(x) - g(x)]dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$	A integral de uma diferença é a diferença das integrais

INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO "U"

O método de substituição é utilizado para simplificar a integração, gerando uma integral que sabemos como resolver. Considerando u = g(x) e colocando du/dx = g'(x) na forma diferencial du = g'(x) dx:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

Exemplo:

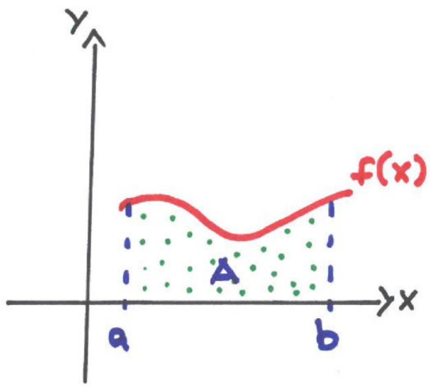
$$\int (x-3)^{12} dx = ? \qquad u = x-3$$

$$du = 1.du = du$$

$$\int (x-3)^{12} dx = \int u^{12} du = \frac{u^{13}}{13} + C = \frac{(x-3)^{13}}{13} + C \ //$$

INTEGRAL DEFINIDA

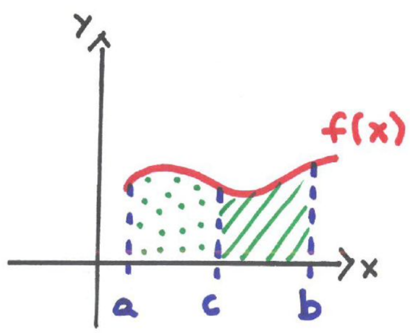
A integral definida possui limites de integração **[a,b]**. Assim, o resultado será um número e não uma equação, ou seja, **não** precisamos mais da constante de integração. A integral definida utiliza conceitos de área, comprimento e volume.



$$\int_a^b f(x)dx = A$$

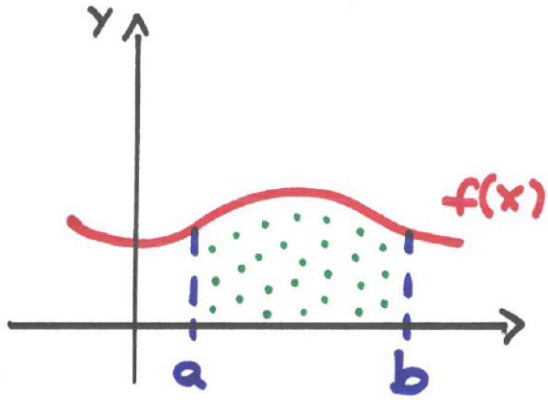
PROPRIEDADES DA INTEGRAL DEFINIDA

Basicamente, as propriedades são as mesmas das integrais indefinidas. Mas há propriedades extras devido aos limites de integração, conforme a tabela:

Propriedades extras da integral definida!	
$\int_a^a f(x)dx = 0$	Quando os limites de integração forem iguais
$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$	Quando os limites estão invertidos
$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ 	Uma integral pode ser reescrita como a soma de duas integrais, reescrevendo os limites

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – PARTE 1

Como calcular uma integral definida: calculando a antiderivada do limite de cima, subtraindo esta do limite de baixo!



Sendo f uma função contínua em [a,b] e *F* a antiderivada de *f*:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad \textbf{ou} \quad \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big]_a^b$$

Exemplo:

$$\int_0^3 (9-x^2)\,dx = 9x - \frac{x^3}{3}\Big]_{x=0}^{3} = \left(27-\frac{27}{3}\right) - 0 = 18 //$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO – PARTE 2

Quando uma integral definida tiver um limite de integração superior variável (x, por exemplo):

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$

Exemplo:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_1^x t^3\,dt\right] = ? \qquad \int_1^x t^3\,dt = \frac{t^4}{4}\Big]_1^x = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^4}{4} - \frac{1}{4}\right] = x^3 //$$

CALCULANDO INTEGRAIS DEFINIDAS POR SUBSTITUIÇÃO

Deve-se levar em conta os efeitos da substituição nos limites de cima e de baixo. Dessa forma, há dois métodos para fazer isso:

- ✓ **Método 1:** Determinar a integral indefinida por substituição e depois voltar para a definida.

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3dx = ? \qquad u = x^2+1 \qquad du = 2x.dx$$

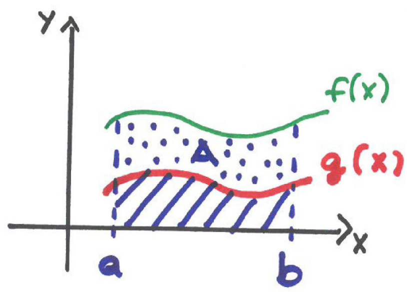
$$\int x(x^2+1)^3dx = \frac{1}{2}\int u^3du = \frac{u^4}{8} = \frac{(x^2+1)^4}{8}\Big]_0^2 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$$

- ✓ **Método 2**: Usar *u = g(x)* para substituir os valores dos limites de integração.

$$\int_0^2 x(x^2+1)^3dx = \frac{1}{2}\int_1^5 u^3du = \frac{u^4}{8}\Big]_1^5 = \frac{625}{8} - \frac{1}{8} = 78$$

$$x=2 \rightarrow u = x^2+1 = 5$$
$$x=0 \rightarrow u = x^2+1 = 1$$

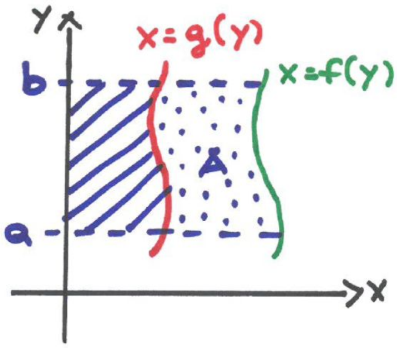
ÁREA ENTRE DUAS CURVAS



$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

> **NOTA MENTAL:** relembrando as propriedades da integral definida (subtração de integrais), aqui nada mais é do que a integral de uma função menos a outra!

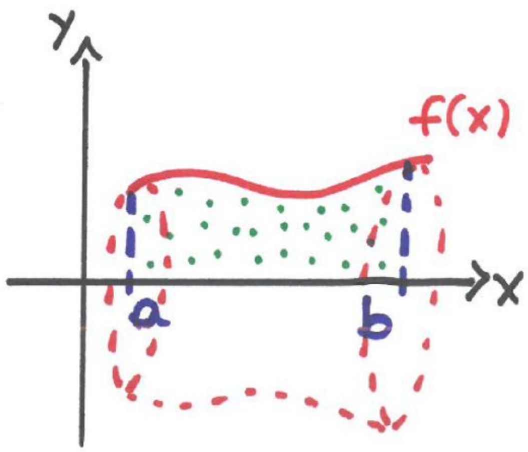
ÁREA INTEGRANDO EM “Y”



$$A = \int_a^b [f(y) - g(y)]dy$$

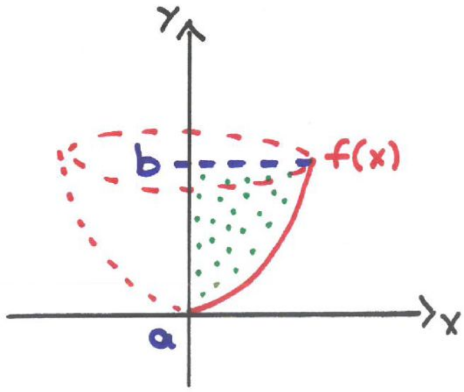
VOLUME POR DISCOS E ARRUELAS EM “X” E “Y”

O volume do sólido de revolução gerado pela rotação da função *f* em torno do eixo x é:



$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

O mesmo pode ser feito quando uma função *f* é girada em torno do eixo *y*.



$$V = \int_a^b \pi [f(y)]^2 dy$$

NOTA MENTAL: talvez seja preciso, em algum momento, calcular o volume de um sólido a partir da diferença do volume de outros dois. Para isso, basta seguir o mesmo esquema da área entre duas curvas.

INTEGRAÇÃO POR PARTES

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du$$

O objetivo da integração por partes é escolher um u e dv para obter uma nova integral, mais fácil de resolver que a original. Exemplo:

$$\int x \cos x\, dx = ? \quad \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x\, dx \end{array} \quad \begin{array}{l} du = dx \\ v = \int dv = \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x \end{array}$$

$$\int x \cos x\, dx = x \operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx =$$

$$= x \operatorname{sen} x - (-\cos x) + C$$

$$= x \operatorname{sen} x + \cos x + C$$

NOTA MENTAL: Pode-se escolher u da seguinte lista: **P**otência, **I**nversa trigonométrica, **T**rigonométrica, **E**xponencial, **L**ogarítmica **(PITEL)**!!

INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS

PRODUTOS DE SENOS E COSSENOS

$$\int sen^m x \, cos^n x \, dx$$

Se *m* e *n* forem números inteiros e positivos, a integral acima pode ser calculada através relações trigonométricas!

n ímpar	**Separar** $cos\,x$ Aplicar $cos^2 x = 1 - sen^2 x$ $u = senx$
m ímpar	**Separar** $sen\,x$ Aplicar $sen^2 x = 1 - cos^2 x$ $u = cos\,x$
m e *n* pares	**Reduzir potências de** $sen\,x$ **e** $cos\,x$ $sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x)$ $cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x)$

$$\int sen^4 x \, cos^4 x \, dx = \int (sen^2 x)^2 (cos^2 x)^2 dx$$

$$\cdot\, sen^2 x = \frac{1}{2}(1 - cos\,2x)$$

$$\cdot\, cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + cos\,2x)$$

$$= \int \left[\frac{1}{2}(1 - cos\,2x)\right]^2 \left[\frac{1}{2}(1 + cos\,2x)\right]^2 dx$$

$$= \frac{1}{16}\int (1 - cos^2 2x)^2 dx = \frac{1}{16}\int sen^4 2x \, dx //$$

$$\cdot\, sen^2 x = 1 - cos^2 x$$

A partir daqui, nós utilizamos o método de substituição *u.du*, sendo $u = 2x$ e

$du = 2dx$:

$$\frac{1}{16}\int sen^4 2x\, dx = \frac{1}{32}\int sen^4 u\, du$$

$u = 2x$

$du = 2dx$

$$= \frac{1}{32}\left(\frac{3}{8}u - \frac{1}{4} sen\ 2u + \frac{1}{32} sen\ 4u\right) + C$$

$$= \frac{3}{128}x - \frac{1}{128} sen\ 4x + \frac{1}{1024} sen\ 8x + C$$

INTEGRAIS TRIGONOMÉTRICAS – PRODUTOS DE TANGENTES E SECANTES

$$\int tg^m x\ sec^n x\ dx$$

n par	**Separar** $sec^2 x$ Aplicar $sec^2 x = tg^2 x + 1$ $u = tg\ x$
m ímpar	**Separar** $sec\ x\ tg\ x$ Aplicar $tg^2 x = sec^2 x - 1$ $u = sec\ x$
m par e *n* ímpar	**Reduzir potências de** $sec\ x$ $tg^2 x = sec^2 x - 1$

SUBSTITUIÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

O método de substituições trigonométricas pode ser realizado em três passos: escolher a substituição correta, resolver a integral e retornar a variável inicial.

Expressão	Substituição
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\ sen\ \theta$
$\sqrt{x^2 + a^2}$	$x = a\ tg\ \theta$

$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$

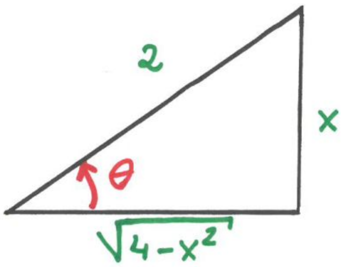
Exemplo:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{\underline{4-x^2}}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\,\text{sen}\,\theta)^2\sqrt{4-4\,\text{sen}^2\theta}} = \int \frac{2\cos\theta\, d\theta}{(2\,\text{sen}\,\theta)^2(2\cos\theta)}$$

$$a^2 - x^2 \rightarrow x = 2\,\text{sen}\,\theta$$
$$dx = 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\text{sen}^2\theta} = \frac{1}{4}\int \text{cossec}^2\theta\, d\theta = -\frac{1}{4}\text{cotg}\,\theta + C$$

Então, deve-se expressar a cotangente em função de x!



$$\text{cotg}\,\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$$

Substituindo na integral já resolvida, temos que:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} + C$$

INTEGRAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS POR FRAÇÕES PARCIAIS

É um método utilizado para decompor divisões de polinômios em frações parciais, obtendo constantes que devem ser determinadas para, então, resolver a integral.

Exemplo:

meSalva!

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = ?$$

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \quad \cdot (x-1)(x+2)$$

$$1 = A(x+2) + B(x-1)$$

$$x = 1 \rightsquigarrow 1 = A(1+2) + B(1-1) \therefore A = \frac{1}{3}$$

$$x = -2 \rightsquigarrow 1 = A(-2+2) + B(-2-1) \therefore B = -\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right| + C \; //$$