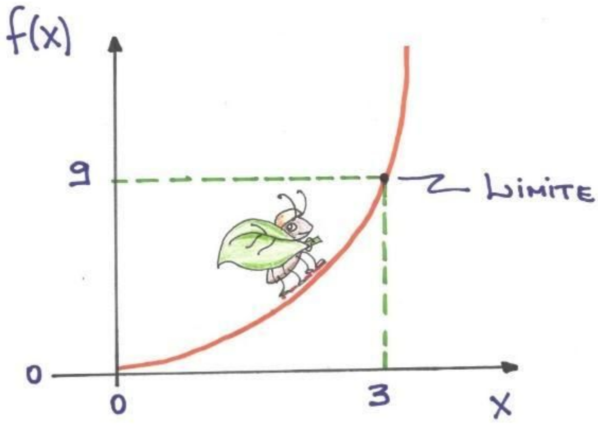
TUDO QUE VOCÊ PRECISAVA SABER SOBRE LIMITES - UM RESUMO

O QUE É UM LIMITE?

Imagine uma formiga está tentando chegar no ponto em x = 3 andando pela curva definida pela função $f(x) = x^2$. Quando ela chegar, f(x) = 9! Esse é o limite da função para x tendendo a 3.



LIMITES INDETERMINADOS

O limite é indeterminado se o resultado do limite, somente substituindo o valor na função, não resulta em um número real.

> **NOTA MENTAL:** A indeterminação acontece sempre que há alguma **operação** envolvendo o **infinito!** Infinito não é um número, é uma **"ideia"!**
>
> $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty \qquad \infty - \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$

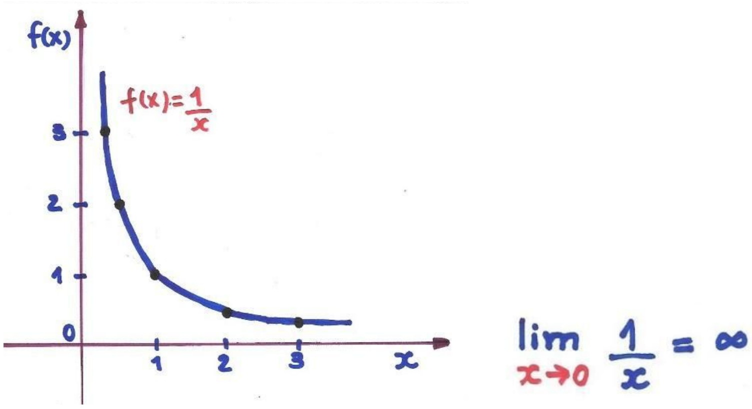
Para resolver estes limites, devemos usar alguma artimanha matemática:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1^2-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$ **INDETERMINADO!**

Resolvendo indeterminações	
Fatoração: ✓ o limite é raíz no numerador e no denominador ✓ frações ✓ Solução: dividir numerador e numerador pelo fator repetido	$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ $x^2-1 \xrightarrow{\text{FATORANDO}} (x-1)(x+1)$ $\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1}(x+1)$ $\lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$
Racionalização: ✓ termos com raíz ✓ frações ✓ Solução: multiplicar pelo conjugado em cima e embaixo!	$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = "\frac{0}{0}"$ $\frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} = \frac{2^2-\sqrt{x}^2}{(4-x)(2+\sqrt{x})} = \frac{\cancel{4-x}}{\cancel{(4-x)}(2+\sqrt{x})}$ $\lim_{x\to 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}!$
Divisão de polinômios: ✓ fração com polinômios ✓ frações ✓ Solução: dividir os dois termos pelo termo de maior grau!	$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x+1}{x^3-4} \overset{\div x^3}{\underset{\div x^3}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{2+3/x^2+1/x^3}{1-4/x^3}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{2+0+0}{1+0} = 2$

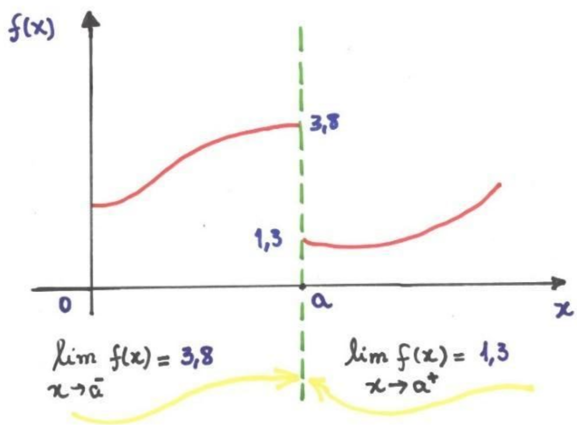
Limites tendendo ao infinito

A divisão de infinitos é indeterminada… mas se quisermos passar a ideia de que uma função tende a um valor muito, muito grande (ou a um valor muito pequeno), podemos dizer que o limite dela é **infinito**!



Limites laterais

Sobre uma função f(x) com uma "quebra", assim:



- ✓ O limite à esquerda (-) é 3,8
- ✓ O limite à direita (+) é de 1,3

Logo, a função acima é descontínua, pois os limites pelos lados são diferentes! Quando isso acontece, o limite ordinário "não existe"!

Propriedades de Limites

Limite de uma constante

Se a e c são constantes, então:

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Limites da soma, produto e quociente

Seja F1 e F2 duas funções dadas no qual os limites de $x \to a$ sabemos,

$$\lim_{x \to a} F_1(x) = L_1$$

$$\lim_{x \to a} F_2(x) = L_2$$

Então:

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) + F_2(x)) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) - F_2(x)) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) \cdot F_2(x)) = L_1 \cdot L_2$$

Finalmente, se $\lim_{x \to a} F_2(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Limites não existe?

A função cos(x), por exemplo, fica variando entre -1 e 1. Por isso, se x for muito grande, não se sabe que valor a função cos(x) terá.

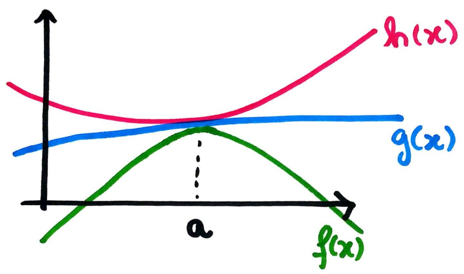
$$\lim_{x \to \infty} \cos(x) = \nexists$$

NOTA MENTAL: Não ter limite não é a mesma coisa que ter limite indeterminado! O indeterminado só precisa ser guiado para a determinação!

Teorema do Confronto

Se uma função g é limitada por outras duas funções (h e f), e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$



Então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

Limites Fundamentais

Alguns limites são muito importantes para não serem citados:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \qquad \lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

Regra de L'Hópital

SPOILER ALERT! Se você ainda não estudou derivadas, pare por aqui! Se não, bem-vindo à um modo legal de resolver limites!

É uma regra para limites tendendo ao infinito a fim de resolver uma indeterminação. Deriva-se as duas funções da fração:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{\infty}{\infty} \; ? \qquad \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad g'(x) = 2x$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{1/x}{2x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x^2} = 0 \,//$$