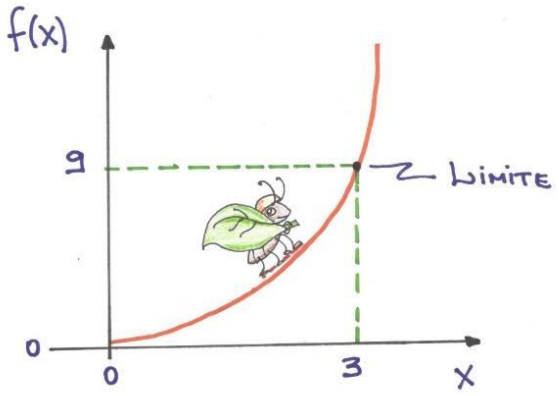
TUDO QUE VOCÊ PRECISAVA SABER SOBRE LIMITES - UM RESUMO

Definição de limites

Imagine o seguinte exemplo: uma formiga está tentando chegar no ponto em x = 3 andando pela curva definida pela função $f(x) = x^2$, então, quando chegar, y será 9!



De modo geral, se f(x) é uma função qualquer, então

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

a equação acima pode ser lida como "o limite de f(x) quando x aproxima-se de a é L." Isso significa que se nós escolhermos valores de x próximos, mas não iguais a a, então f(x) será próximo de L. Além disso, f(x) se aproxima cada vez mais de L, enquanto x se aproxima de a.

A seguinte notação alternativa pode ser usada:

$$f(x) \to L \quad \text{quando} \quad x \to a$$

Substituição de números para encontrar o limite

Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

Esse seria o primeiro passo para determinar um limite. Nesse caso, basta substituir o valor do limite diretamente na fórmula.

Dado o limite:

$$\lim_{x \to 1} 2x - 4$$

Para resolvê-lo basta substituir o valor de 1 em x, logo:

$$\lim_{x \to 1} 2 \cdot 1 - 4 = -2$$

Limites indeterminados

As indeterminações podem surgir quando não temos como calcular um limite de maneira racional. Por exemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{1^2 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$ INDETERMINADO!

0/0 é um problema! Nós realmente não sabemos o valor de 0/0 (é "indeterminado"), então precisamos de outra maneira para encontrá-lo. Então, em vez de tentar trabalhar para $x = 1$ vamos tentar aproximar cada vez mais os valores:

x	$\frac{x^2-1}{x-1}$
0,5	1,5
0,9	1,9
0,99	1,99
0,999	1,999

mesalva.com
Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

É possível notar que quando x se aproxima de 1, então $(x^2 - 1)(x - 1)$ se aproxima de 2.

Estamos agora diante de uma situação interessante:

- ✓ Quando x = 1 não sabemos a resposta (é indeterminado)
- ✓ Mas podemos ver que será 2

Limites tendendo ao infinito

Vamos começar com um exemplo interessante: pergunta-se qual o valor de 1/∞. Resposta: não sabemos! E por que não sabemos? A razão mais simples é que o Infinito não é um número e sim uma ideia. Talvez pudéssemos dizer que 1/∞ = 0, ... mas isso também seria um problema, porque se dividirmos 1 em pedaços infinitos, eles terminam em 0 cada e se somarmos novamente, o resultado será 0 e não 1. O que aconteceu com o 1?

Em vez de dizer que x se aproxima de algum número finito, pode-se dizer que x se tornar cada vez maior e perguntar o que acontece com f(x). Se houver um número L tal que f(x) chega arbitrariamente perto de L, se alguém escolher um x suficientemente grande, então escrevemos:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

("O limite para x tendendo para o infinito é L.")

Exemplo: f(x) = 1/x

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Em vez de tentar achar o valor no infinito (porque não podemos obter uma resposta sensata), vamos tentar valores cada vez maiores de x:

Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

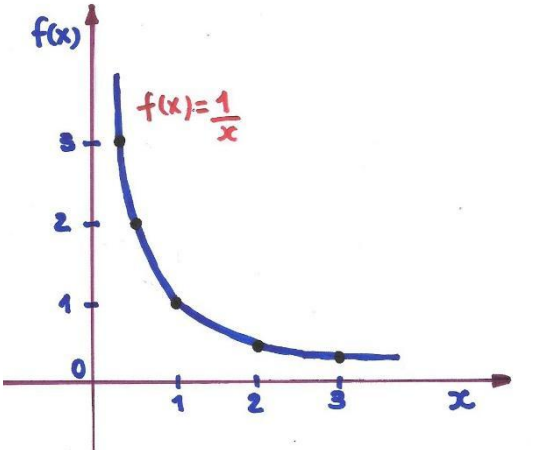
x	$\frac{1}{x}$
1	1
10	0,1
100	0,01
10000	0,00001

Agora podemos ver que quando x fica maior, 1/x tende para 0.

Estamos agora diante de uma situação interessante:

- ✓ Não podemos dizer o que acontece quando x chega ao infinito
- ✓ Mas podemos ver que 1/x vai para 0

O gráfico comporta-se da seguinte maneira:



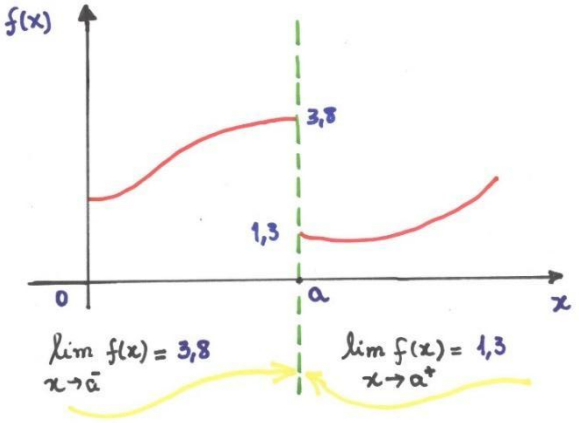
Se colocarmos o limite tendendo a zero, vemos que o limite é indeterminado. E de acordo com as observações no gráfico, ele está tendendo ao infinito.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Limites laterais

Sobre uma função f(x) com uma "quebra", assim:

mesalva.com
Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.



O limite não existe em "a"

Não podemos dizer qual é o valor em "a" porque há duas respostas concorrentes:

- ✓ 3,8 da esquerda e
- ✓ 1,3 da direita.

Mas podemos usar os sinais especiais "-" ou "+" (conforme gráfico acima) para definir limites unilaterais:

- ✓ O limite à esquerda (-) é 3,8
- ✓ O limite à direita (+) é de 1,3
- ✓ E o limite ordinário "não existe"

No exemplo acima, apresentamos um explicação mais simples do conceito de continuidade, o qual pode ser definido por: "uma função f(x) definida num intervalo é contínua nesse intervalo, se f(x) for contínua em todos os pontos desse intervalo."

Logo, a função acima é descontínua, pois não condiz com a definição.

Propriedades de Limites

Limite de uma constante

Se a e c são constantes, então:

Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} x = a$$

Limites da soma, produto e quociente

Seja F1 e F2 duas funções dadas no qual os limites de $x \to a$ sabemos,

$$\lim_{x \to a} F_1(x) = L_1$$

$$\lim_{x \to a} F_2(x) = L_2$$

Então:

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) + F_2(x)) = L_1 + L_2$$

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) - F_2(x)) = L_1 - L_2$$

$$\lim_{x \to a} (F_1(x) \cdot F_2(x)) = L_1 \cdot L_2$$

Finalmente, se $\lim_{x \to a} F_2(x) \neq 0$

$$\lim_{x \to a} \frac{F_1(x)}{F_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$$

Quando os limites não existem

mesalva.com
Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

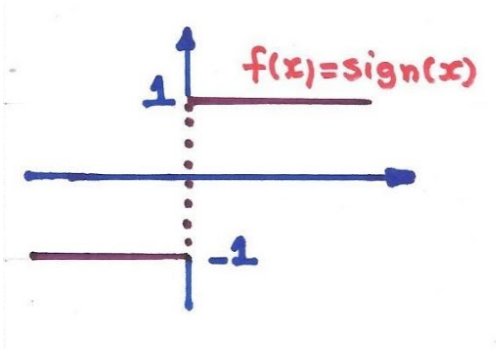
Isso pode realmente acontecer e, nessa seção, veremos alguns exemplos de limites que não existem. Primeiro, vamos concordar sobre o que chamaremos de limite não existente.

Definição: Se não há nenhum valor para L no limite:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Então, nós dizemos que o limite não existe.

Exemplo: Função sinal próximo a zero, x=0. A função sinal é definida como:



$$\text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{em } x<0 \\ 0 & \text{em } x=0 \\ 1 & \text{em } x>0 \end{cases}$$

Nota-se que o sinal de zero é definido em zero. Entretanto, a função não tem limite em x=0. Suponha um número L qualquer, então:

$$\lim_{x \to 0} \text{sign}(x) = L$$

Portanto, uma vez que pegarmos um pequeno número positivo de x, L=+1, mas se pegarmos um pequeno número negativo de x, L= -1. O problema está que L não pode ser +1 e -1 ao mesmo tempo.

Teorema do Confronto

Suponha que:

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

mesalva.com
Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

Então:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x)$$

Limites trigonométricos

Há dois limites fundamentais: o limite do seno e o limite do cosseno.

Limite do seno:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1$$

Limite do cosseno:

$$\lim_{x \to 0} \cos(x) = 1$$

Exemplos de limites

Substituição: a primeira tentativa é apenas colocar o valor do limite e verificar se funciona (em outras palavras, substituição).

mesalva.com
Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

Exemplo | Funciona?

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} \Rightarrow \frac{(1-1)}{(1-1)} = \frac{0}{0} \quad \times$$

$$\lim_{x\to 10} \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{10}{2} = 5 \quad \checkmark$$

Fatorização: é possível tentar a decomposição dos elementos.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

$$x^2-1 \xrightarrow{\text{FATORANDO}} (x-1)(x+1)$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}} = \lim_{x\to 1} (x+1)$$

$$\lim_{x\to 1} (x+1) = 1+1 = 2$$

Conjugados: Quando for uma fração, multiplicar a parte superior e inferior por um conjugado também pode ajudar.

$$\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} = \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{4-x} \times \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$$

Então,

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{2+\sqrt{x}} = \frac{1}{2+\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$$

Regra de L'Hópital

Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.

É uma regra para limites tendendo ao infinito a fim de sair da indeterminação. Para ter um bom entendimento, observe o exemplo a seguir:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x}$$

Há uma indeterminação no limite acima. Então, separamos a função em duas novas funções, sendo:

$$f(x) = x \qquad g(x) = e^x$$

Logo, para calcular o limite, tira-se a derivada de f(x) e g(x), ficando:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

mesalva.com
Todos os direito reservados © Me Salva! 2017.