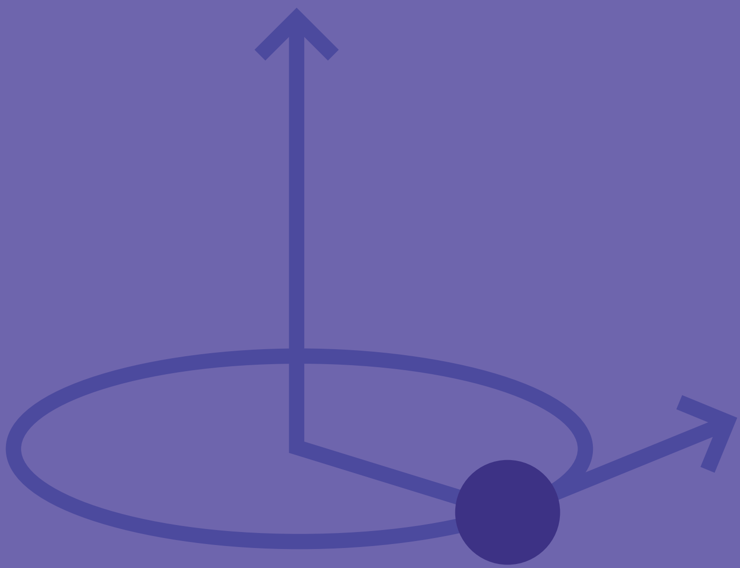
FÍSICA

ROLAMENTO E MOMENTO ANGULAR



meSalva! | ENGENHARIA

1 ROLAMENTO

O rolamento é um movimento que associa translação e rotação. É o caso, por exemplo, de uma roda que, ao mesmo tempo que rotaciona em torno de seu eixo central, translada como um todo. Use a figura abaixo para acompanhar esse resumo.

VELOCIDADE DO CENTRO DE MASSA

Para esse tipo de movimento, podemos avaliar a velocidade do centro de massa da roda em rolamento como sendo:

$$v_{CM} = \omega R,$$

onde ω é a velocidade angular da roda em [rad/s] e R é o raio da roda.

ENERGIA CINÉTICA

A energia cinética desse tipo de movimento pode ser calculada através da expressão abaixo:

$$K = ½\, I_{CM}\, \omega^2 + ½\, Mv_{CM}{}^2,$$

sendo I_{CM} o momento de inércia da roda em torno de seu eixo de rotação e M a massa da roda.

ACELERAÇÃO

Se a roda em análise estiver sujeita à uma aceleração em seu centro de massa, pode-se enunciar a seguinte relação:

$$a_{CM} = \alpha R,$$

sendo a aceleração angular em [rad/s²] da roda.

Se estivermos analisando uma roda que desce suavemente uma rampa de uma inclinação θ , tem-se que a aceleração ao longo de um eixo x que é paralelo à rampa será:

$$a_{CM} = \frac{-g \text{ sen } \theta}{1 + I_{CM}/MR^2}$$

2 MOMENTO ANGULAR

O momento angular $\vec{\ell}$ de uma partícula é dado através da seguinte equação vetorial:

$$\vec{\ell} = m\,(\vec{r}\,.\,\vec{v}),$$

onde m é a massa da partícula, $\vec{r}$ é o vetor posição da partícula em relação a um ponto fixo definido no exercício (costuma ser a origem) e $\vec{v}$ é a velocidade vetorial da partícula. Se estivermos interessados em calcular o módulo do momento angular, dispomos das seguintes equações:

$$\ell = r.m.v.sen\varphi$$
$$\ell = r.p_{\perp} = r.m.v_{\perp}$$
$$\ell = r_{\perp}\,p = r_{\perp}.m.v\,,$$

onde φ é o ângulo entre os vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$, $v_{\perp}$ é a componente de $\vec{v}$ perpendicular a $\vec{r}$ e $r_{\perp}$ é a distância perpendicular entre o ponto fixo em análise e a extensão do vetor momento linear $\vec{p}$ da partícula. A unidade no SI de momento angular é kg.m²/s.

SEGUNDA LEI DE NEWTON PARA ROTAÇÃO

A segunda lei de Newton para uma partícula pode ser enunciada através da igualdade entre o torque resultante e a derivada primeira do vetor momento angular em relação ao tempo t, como segue.

$$\tau_{res} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

MOMENTO ANGULAR DE UM SISTEMA DE PARTÍCULAS

O momento angular para um sistema de partículas é simplesmente a soma de todos os momentos angulares de cada partícula. O fórmula abaixo descreve isso.

$$\vec{\ell} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \ldots + \vec{\ell}_n$$
$$\vec{\ell} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i$$

MOMENTO ANGULAR DE UM CORPO RÍGIDO

O momento angular de um corpo rígido que gira em torno de um eixo fixo, o momento angular é dado pela fórmula abaixo.

$$\ell = I\,.\,\omega$$

CONSERVAÇÃO DO MOMENTO ANGULAR

A lei de conservação do momento angular enuncia que, se o torque resultante do sistema for nulo e o sistema se mantiver constante, o momento angular se conserva:

$$\vec{\ell}_i = \vec{\ell}_f$$

3 EXEMPLOS

Vejamos alguns exemplos sobre rolamento e momento angular.

ROLAMENTO

Considere uma bola de massa m = 2kg e raio R que rola, sem deslizar, a partir do repouso, sobre uma rampa de inclinação θ = 30°. Suponha que a bola percorre uma distância vertical de h=1,50m até sair da rampa. Com que velocidade a bola chega à base da rampa?

A energia mecânica E do sistema se conserva à medida que a bola rola rampa abaixo. Dessa forma, temos o seguinte:

$$E_i = E_f$$

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

No instante inicial (bola em repouso), a energia cinética é nula $K_i = 0$, enquanto a energia potencial gravitacional é $U_i = mgh$. No instante final (quando a bola deixa a rampa), a energia potencial gravitacional passa a ser zero ($U_f = 0$), pois $h = 0$. Já a energia cinética será composta por uma parcela que diz respeito à translação da bola e outra que diz respeito à rotação da bola:

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{CM}{}^2.$$

Dessa forma, temos que:

$$U_i + K_i = U_f + K_f$$

$$mgh = \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2} m v_{CM}{}^2$$

O momento de inércia I_{CM} é dado por $\tfrac{2}{5}MR^2$. Podemos escrever a velocidade angular como sendo v_{CM}/R. Dessa forma, nossa igualdade fica:

$$mgh = \tfrac{1}{2}(\tfrac{2}{5}MR^2).(v_{CM}/R)^2 + \tfrac{1}{2} m v_{CM}{}^2$$

Isolando v_{CM}, encontramos o seguinte:

$$v_{CM} = \sqrt{\tfrac{10}{7} gh} = 4{,}63 \, m/s$$

Perceba que a velocidade não depende da massa e do raio da bola.

MOMENTO ANGULAR

Considere um homem que está de pé sobre uma plataforma que gira ω = 3rad/s. O homem está com seus braços abertos, segurando um tijolo em cada mão. O momento de inércia do conjunto formado pela plataforma, homem e tijolos é 5kg.m². Agora, o homem move seus braços e o momento de inércia reduz para 2 kg.m².

a) Qual a nova velocidade angular do conjunto?

Como o torque resultante do sistema é nulo e o sistema é fechado e isolado, o momento angular é conservado.

$$\ell_i = \ell_f$$

$$\ell_i \, \omega_i = I_f \, \omega_f$$

$$5 \,.\, 3 = 2 \,.\, \omega_f$$

$$\omega_f = 7{,}5 \, rad/s$$

b) Qual a nova energia cinética do conjunto?

$$K = \tfrac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \tfrac{1}{2}\, 2 . 7{,}5^2 = 56{,}25 \, J.$$